HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

MA8020 Tekniska beräkningar
Randvärdesproblem
Extra uppgifter
17 december 2025

Problem 1

En elastisk lina (t.ex. en bärlina i en bro) är fastspänd i båda ändarna. Vi vill beräkna den vertikala nedböjningen $u(x)$ när linan utsätts för en ojämn last $f(x)$ (t.ex. snö som samlats ojämnt). Systemet beskrivs av

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

Vi väljer en last som är noll vid ändarna men har en kraftig, icke-polynomisk topp genom lastfunktionen:

$$f(x) = 50 \cdot \sin^2(\pi x) \cdot e^{-x}$$

Lös problemet med FDM. Beräkna maximala nedböjningen och redovisningen av resultatet ska inkludera styvhetsmatrisen $\mathbf{A}$, lastvektorn $\mathbf{b}$ och lösningsvektorn $\mathbf{u}$ för något lämpligt värde på n. Plotta även u_{FDM} tillsammans med resulatet u_M från Mathematicas `NDSolve`.

Problem 2

Lös problem 1 med FEM och jämför resultaten. Redovisa även här $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och lösningsvektorn $\mathbf{u}$. Plotta u_h, u_{FDM} och u_M i samma graf. Felet definieras som $e(x) = u_{\text{exakt}}(x) - u_h(x)$. Beräkna globala felet som är L^2-normen av $e(x)$ där vi sätter $u_{\text{exakt}} = u_M$:

$$||e||_{L^2} = \left(\int_0^1 (u_M(x) - u_h(x))^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Utnyttja följande vid beräkningarna:

- Använd samma antal noder som i Problem 1.
- Lastvektorn $\mathbf{b}$ beräknas med 3-punkters Gausskvadratur.
- Randvillkoret $u(1) = 0$ kan hanteras enligt tipsen om Dirichlet-villkor från föreläsningen om randvärdesproblem.

Problem 3

Vi studerar ett endimensionellt tidsberoende värmeledningsproblem (diffusion) i en stång med längden L. Det allmänna matematiska problemet är en partiell differentalekvation (PDE) där $u(x,t)$ är temperaturen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \quad x \in (0, L), \, t > 0 \tag{1}$$

I det här fallet är:

- Längden $L = 1$
- Diffusivitetskonstanten $\alpha = 0.01$
- Begynnelsevillkoret (BV): $u(x, 0) = 10 \sin(\pi x)$
- Randvillkoren (RV): Dirichlet-villkor (fixerad temperatur) vid ändarna:
  - Vänster rand: $u(0, t) = 0$
  - Höger rand: $u(L, t) = 20$
- Ingen intern uppvärming, dvs källtermen $g(x, t) = 0$

Lösningsmetod: Implicit finita differensmetod (Bakåt-Euler)

För att lösa PDE:n numeriskt används FDM, där både rummet (x) och tiden (t) diskretiseras. Den implicita metoden väljs för dess A-stabilitet. Rummet diskretiseras med n intervall (konstant steglängd $h = \frac{L-0}{n}$), vilket ger $N = n - 1$ inre noder. Vi låter u_i^k beteckna temperaturen vid nod x_i och tid t_k. Följande approximationer används för derivatorna:

1. *Tidsderivatan (Bakåt-Euler):* Approximation vid nod i vid den *nya tidpunkten* t_{k+1}:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}$$

2. *Andraderivatan:* Centraldifferens, beräknad vid den *nya tidpunkten* t_{k+1}:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2}$$

Tips för implementation:

1. Sätt in differenskvoterna i PDE:n, samla alla okända termer (index $k+1$) på vänster sida och sätt $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{h^2}$:

$$\underbrace{-\lambda u_{i-1}^{k+1} + (1+2\lambda) u_i^{k+1} - \lambda u_{i+1}^{k+1}}_{\text{Okända vid } t_{k+1}} = \underbrace{u_i^k}_{\text{Känd från } t_k} \qquad i = 1, 2, ..., N$$

   Ovanstående resulterar i ett ekvationssystem $\mathbf{A}\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{B}^k$ där styvhetsmatrisen $\mathbf{A}$ är en konstant tridiagonal $N \times N$-Toeplitz-matris.

2. Randvillkoren $u_0^{k+1} = 0$ och $u_{N+1}^{k+1} = 20$ flyttas över till lastvektorn $\mathbf{B}^k$ som vid vanlig FDM.

3. Lösningen startar med den givna initialtemperaturen $\mathbf{u}^0$. Vid varje tidssteg k, konstrueras $\mathbf{B}^k$ och det linjära systemet $\mathbf{A}\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{B}^k$ löses. Använd en effektiv lösningsmetod som t.ex. Mathematicas `LinearSolve`.

Redovisning av resultatet:

1. (a) Plotta $u(x, t)$ som funktion av x i intervallet $[0, 1]$ för några olika tidpunkter som visar hur systemet utvecklas mot jämvikt.

   (b) Bestäm approximativt den tid t_{slut} då lösningen når jämvikt.

2. Resultatanalys:

   (a) Vid jämvikt är $\partial u/\partial t = 0$ dvs är jämviktslösningen $u(x)$ är den lösning som uppfyller BVP

$$\begin{cases} u''(x) = 0, \\ u(0) = 0,\ u(L) = 20. \end{cases} \tag{2}$$

   Plotta den analytiska lösningen $u(x)$ till (2) tillsammans med den numeriska lösningen för $t = t_{\text{slut}}$ så att man ser att de ligger nära varandra.

   (b) Beräkna en referenslösning $\mathbf{u}_{\text{ref}}$ för mycket små h och Δt för lämpligt t. Beräkna sedan det globala felet

$$\varepsilon_G(h) = ||\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{\text{ref}}||$$

   för olika h och plotta $\varepsilon_G(h)$ som funktion av h i log-log-skala. Lutningen på denna graf ska vara ≈ 2 eftersom FDM-metoden är $\mathcal{O}(h^2)$ i rummet.

   (c) Bestäm maximalt absolut fel, dvs maximala skillnaden mellan $\mathbf{u}_{\text{ref}}$ och den analytiska jämviktslösningen vid t_{slut}:

$$\varepsilon_{\max} = \max_i |u_{\text{ref},i}(t_{\text{slut}}) - u(x_i)|$$

   $\varepsilon_{\max} \lesssim 10^{-4}$ bör kunna nås vilket är en bekräftelse på tillräckligt hög noggrannhet i det här fallet.