MA8020 Tekniska beräkningar

Något om numerisk derivering

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

13 november 2025

Numerisk derivering

Exempel 1

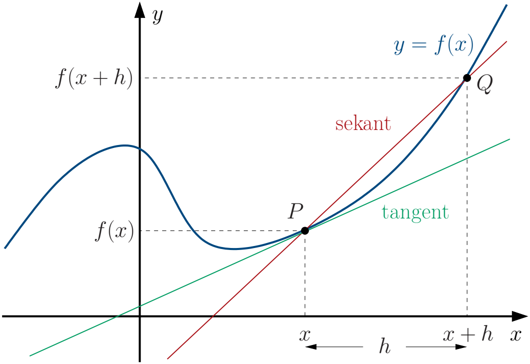
En bil färdas mellan två platser och vi har information om hur långt den kört vid ett antal tidpunkter $t_0, t_1, .., t_n$. Hur ska vi uppskatta bilens fart vid t ex $t = t_3$?

Allmänt: Antag att vi kan känner ett antal funktionsvärden för en funktion $f(x)$ vid $x = x_0, x_1, ..., x_n$ men vi har ingen information om derivatan $f'(x)$.

Hur ska vi uppskatta $f'(x)$?

Definition 1

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

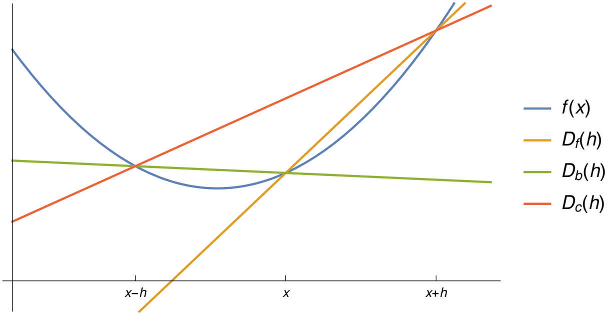


Numerisk derivering

Differensapproximationer

Om $h = x_{i+1} - x_i$ (ekvidistanta punkter) är ett (litet) positivt tal gör vi följande approximationer:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &\approx D_{\mathrm{f}}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \leftarrow \text{Framåtdifferens} \\
f'(x) &\approx D_{\mathrm{b}}(h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} && \leftarrow \text{Bakåtdifferens} \\
f'(x) &\approx D_{\mathrm{c}}(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} && \leftarrow \text{Centraldifferens}
\end{aligned}
$$



Numerisk derivering

Differensapproximationer

Sats 1 (Taylors formel)

Om f har kontinuerliga derivator av ordning $\leq n+1$ kring x så är

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x) + f'(x)(x_1 - x) + \frac{f''(x)}{2}(x_1 - x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x_1 - x)^3 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_1 - x)^{n+1} \quad \text{där } \xi \text{ ligger mellan } x \text{ och } x_1. \end{aligned}$$

Med $x_1 = x \pm h \Leftrightarrow h = \pm(x_1 - x)$ är ξ mellan x och $x \pm h$ och vi får

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \cdots \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \cdots \end{aligned}$$

Addition av dessa uttryck ger direkt en approximation för $f''(x)$:

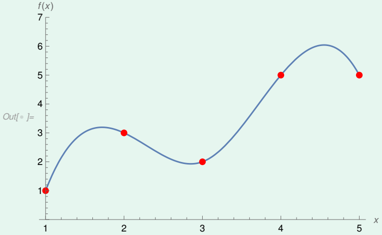
$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Numerisk derivering

Exempel 2

Bestäm approximationer för $f'(3)$ och $f''(3)$ med framåt-, bakåt- och centraldifferenser och följande funktionsvärden:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	2	5	5



Resultat:

$$f'(3) \approx \begin{cases} D_f(1) & = \frac{f(3+1)-f(3)}{1} = \frac{5-2}{1} = 3 \\ D_b(1) & = \frac{f(3)-f(3-1)}{1} = \frac{2-3}{1} = -1 \\ D_c(1) & = \frac{f(3+1)-f(3-1)}{2\cdot 1} = \frac{5-3}{2\cdot 1} = 1 \end{cases}$$

$$f''(3) \approx \frac{f(3+1)-2f(3)+f(3-1)}{1^2} = \frac{5-2\cdot 2+3}{1^2} = 4$$

Numerisk derivering

Felet vid differensapproximationer

Med Taylorutveckling kan vi uppskatta felet vid framåt-, bakåt och centraldifferens:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \cdots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \leftarrow \text{Framåtdifferens}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \leftarrow \text{Bakåtdifferens}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad \leftarrow \text{Centraldifferens}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad \leftarrow \text{Centraldifferens}$$

Vi kan alltså normalt förvänta oss betydligt högre noggrannhet om vi använder centraldifferens.

Numerisk derivering

Derivering via interpolation

Man kan förstås också gå vägen via polynominterpolation:
Ansatsen $p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_n x^n$ och villkoren $p(x_i) = f(x_i)$ ger ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{f}$$

För att bestämma approximationer till f:s derivator behöver vi bara derivera $p_n(x)$.

Anm:

- Ofta används $p_2(x)$ vilket ger fel av $\mathcal{O}(h^2)$ i derivatan.
- Derivering med lokal polynominterpolation kräver inte ekvidistanta x-värden (dvs konstant h) vilket differensapproximationerna gör.

Numerisk derivering

Derivering via interpolation

Exempel 3

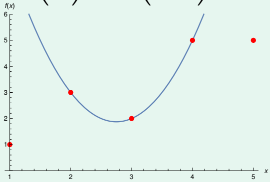
Uppskatta $f'(3)$ och $f''(3)$ genom att först bestämma ett interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av tabellen:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	2	5	5

Ansats $p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ och centrering kring $x = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2(x) &= 17 - 11x + 2x^2 \\ \Rightarrow p_2'(x) &= -11 + 4x \Rightarrow p_2'(3) = 1 \\ \Rightarrow p_2''(x) &= 4 \end{aligned}$$



OBS! Samma resultat som centraldiff.approx.

Numerisk derivering
Richardsonextrapolation

Taylors formel igen:

$$
\begin{aligned}
f(x \pm h) &= f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \cdots \\
&= f(x) \pm f'(x)h + a_2h^2 \pm a_3h^3 + a_4h^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

där $a_2, a_3, a_4, \ldots$ beror på x men inte på h.
Centraldifferensapproximationen kan nu skriva som:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{=F_2(h)} + \underbrace{2a_3}_{=b} h^2 + \mathcal{O}(h^4) = F_2(h) + bh^2 + \mathcal{O}(h^4) \\
&= F_2(h) + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

Genom att beräkna $F_2(h)$ för h och $2h$ och sedan kombinera resultaten kan vi bestämma en approximation till $f'(x)$ med mindre trunkeringsfel än $F_2(h)$.

Anm: $\mathcal{O}(h^n) \pm \mathcal{O}(h^n) = \mathcal{O}(h^n)$ och om k är ett fixt tal så är $\mathcal{O}((kh)^n) = \mathcal{O}(h^n)$

Numerisk derivering

Richardsonextrapolation

Vi får:

$$
\begin{aligned}
F_2(h) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) - bh^2 + \mathcal{O}(h^4) \\
F_2(2h) &= \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h} = f'(x) - b(2h)^2 + \mathcal{O}(h^4) \\
\Rightarrow \frac{F_2(2h)-F_2(h)}{3} &= -bh^2 + \mathcal{O}(h^4) = F_2(h) - f'(x) + \mathcal{O}(h^4) \\
\Leftrightarrow f'(x) &= \frac{4F_2(h)-F_2(2h)}{3} + \mathcal{O}(h^4) = F_4(h) + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}
$$

Processen kan upprepas och $F_k(h)$ och $f'(x)$ kan bestämmas rekursivt genom

$$
F_k(h) = \frac{2^{k-2}F_{k-2}(h) - F_{k-2}(2h)}{2^{k-2}-1} \Rightarrow f'(x) = F_k(h) + \mathcal{O}(h^k), \;\; k = 2, 4, 6, \ldots
$$

Anm: Lewis Richardson (1881-1953) var en engelsk matematiker.

Numerisk derivering

Richardsonextrapolation

Exempel 4

Uppskatta $f'(0.5)$ med hjälp av $F_2(h)$ och $F_4(h)$, $h = 0.1$, och funktionsvärdena:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$f(x)$	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534	0.76484	0.69671	0.62161

$$
\begin{aligned}
F_2(0.1) &= \frac{f(0.5+0.1)-f(0.5-0.1)}{2\cdot 0.1} = \frac{0.82534-0.92106}{0.2} = -0.47860 \\
F_4(0.1) &= \frac{4F_2(0.1)-F_2(2\cdot 0.1)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(4\frac{f(0.5+0.1)-f(0.5-0.1)}{2\cdot 0.1} - \frac{f(0.5+0.2)-f(0.5-0.2)}{2\cdot 0.2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(4\frac{0.82534-0.92106}{0.2} - \frac{0.76484-0.95534}{0.4}\right) = -0.47938 \\
\Rightarrow f'(0.5) &= -0.47860 + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{respektive} \quad f'(0.5) = -0.47938 + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}
$$

Anm: I tabellen ovan är $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(0.5) = -\sin 0.5 = -0.47942\ldots$