MA8020 Tekniska beräkningar

Något om begynnelsevärdesproblem

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

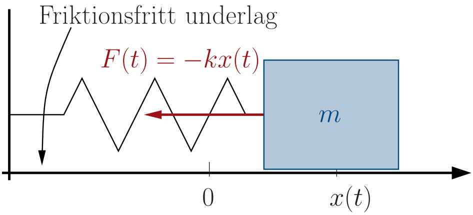
13 december 2025

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Newtons andra lag

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$$

- Beskriver förhållandet mellan kraften $\boldsymbol{F}$ som verkar på ett objekt och dess acceleration.
- m är objektets massa, $\boldsymbol{x}(t)$ är dess position vid tiden t och $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ är den resulterande kraften som verkar på objektet.
- Newtons andra lag är en grundsten inom klassisk mekanik och används för att modellera rörelse i många fysiska system.

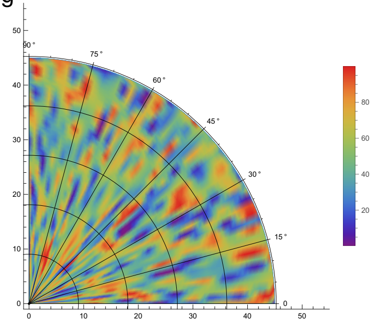


Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

- $u(x, y, z, t)$ är temperaturen i ett material i punkten (x, y, z) vid tiden t.
- Beskriver hur temperaturen förändras över tid där α är den termiska diffusiviteten som bestämmer hur snabbt värme sprider sig i materialet.
- Används för att modellera värmeöverföring i t.ex. byggnader, motorer eller naturfenomen som klimatförändringar.

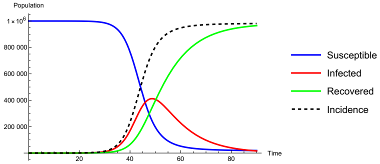


Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

SIR-modellen (Epidemimodell)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

- Modellen delar in befolkningen i tre fack: S (Mottagliga, Susceptible), I (Infekterade, Infectious) och R (Immuna/Borttagna, Recovered/Removed).
- $S(t), I(t), R(t)$ är antalet individer i respektive fack vid tiden t. Modellen antar att $S + I + R = N$ (total population, konstant).
- β är smittfrekvensen (kontaktfrekvensen · smittorisken). γ är tillfrisknandefrekvensen.
- dS/dt: Beskriver hur mottagliga individer minskar när de smittas.
- dI/dt: Beskriver hur infekterade ökar genom smitta (βSI) och minskar genom tillfrisknande (γI).
- Används för att modellera och förutsäga spridningen av epidemiska sjukdomar samt effekten av vaccinationsprogram och restriktioner.



Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Logistisk tillväxt

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

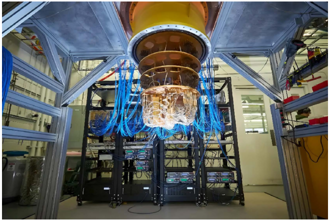
- Beskriver hur en population $P(t)$ växer när det finns en övre gräns för tillgången på resurser (kapaciteten K).
- r är den maximala tillväxttakten när P är liten.
- Används för att modellera populationstillväxt i ekosystem, sjukdomsspridning och marknadsdynamik.

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Schrödingerekvationen

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

- Beskriver hur vågfunktionen $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ för ett kvantmekaniskt system förändras över tid.
- $\hat{H}$ är Hamiltonoperatorn som beskriver den totala energin i ett kvantmekaniskt system och styr hur systemet utvecklas över tid.
- Ekvationen är central inom kvantfysik och används för att förklara fenomen som elektroner i atomer, molekylers interaktioner och för att modellera kvantdatorer.



Googles kvantdator

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar
Maxwells ekvationer

Gauss lag för det elektriska fältet: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Gauss lag för det magnetiska fältet: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Faradays induktionslag: $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Ampère-Maxwells lag: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

- Grundläggande relationer för elektriska och magnetiska fält.
- De beskriver hur elektriska fält (**E**) och magnetiska fält (**B**) skapas och förändras över tid och rum.
- Ekvationerna används i allt från design av elektriska apparater till radiovågor och ljus.

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Vågekvationen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Beskriver utbredningen av vågor där $u(x, t)$ representerar vågens förskjutning från jämviktsläget i punkten x vid tiden t, och c är våghastigheten.
- Används inom områden som ljudvågor, ljusvågor och även vattenvågor, och har stor betydelse inom fysik, musik och geovetenskap.

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Bernoullis ekvation:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)=0$$

- Bernoullis ekvation är en energibevarandelag för strömmande vätskor där tryck p, hastighet v, densitet ρ, och höjd z beaktas.
- Används bland annat inom aerodynamik för att förklara luftflöden över t.ex. flygplansvingar men även inom hydralik.

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Navier-Stokes ekvationer

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

- Beskriver rörelsen hos viskösa vätskor och gaser.
- $\boldsymbol{v}$ är hastigheten, p är trycket, μ är viskositeten, och $\boldsymbol{f}$ är externa krafter.
- Används för att modellera flödet av vätskor och gaser inom fluidmekanik, meteorologi och medicinteknik.
- Är avgörande för att förstå såväl strömmar i oceaner som luftflöden och blodflöde i människokroppen.

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Riccati ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = q(x) + p(x)y + r(x)y^2$$

- En icke-linjär ekvation som förekommer inom optimering och reglerteori.
- Används för att lösa problem inom reglerteknik då systemet inte är linjärt.
- Används även ofta inom ekonomi och robotteknik för att optimera beslut och systemdynamik.

Viktiga differentialekvationer och deras tillämpningar

Black-Scholes ekvation

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

- Modellen är en partiell differentialekvation som används för att beräkna optionspriser baserat på faktorer som aktiekurs, volatilitet, riskfria ränta och tidsfaktorer.
- Den revolutionerade finansvärlden genom att möjliggöra prissättning av finansiella derivat.

Ordinära differentialekvationer

Terminologi

- En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation som innehåller derivator av en okänd funktion av en variabel.
- En ekvation som innehåller derivator av en okänd funktion av flera variabler kallas en partiell differentialekvation (PDE).
- Om differentialekvationen inte innehåller högre derivator än n:te derivatan av den okända funktionen så är den av ordningen n.
- En lösning till en ODE i ett intervall I är en funktion $y = y(x)$ sådan att y uppfyller ekvationen för alla x i I.
- Mängden av alla lösningar till en ODE kallas den allmänna lösningen.
- En ODE kallas linjär om den kan skrivas som

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_2(x)y'' + g_1(x)y' + g_0(x)y = h(x) \qquad (1)$$

  dvs om den beror linjärt på y och dess derivator.
- Den linjära ODE:n (1) kallas homogen om $h = 0$ annars inhomogen.

Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen

Begynnelsevärdesproblem

- En ordinär differentialekvation av 1:a ordningen kan skrivas på formen

$$y'(x) = f(y, x) \tag{2}$$

- y är den okända funktionen och x den oberoende variabeln.
- Vi begränsar oss till fallet då $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Inom tillämpningar (t.ex fysik) är variabeln ofta tid och då används beteckningen $\dot{x}(t) = f(x, t)$

Exempel 1 (Från Envariabelanalys)

$$y'(x) = f(x, y) = 2xy(x) \Leftrightarrow y(x) = Ce^{x^2} \qquad \leftarrow \text{Allmän lösning}$$

- Den allmänna lösningen till (2) har *en* konstant. Antalet konstanter är alltid lika med ordningen.

Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen

Begynnelsevärdesproblem

- Ett sätt att bestämma C är att ange ett begynnelsvärde (BV) (motsvarar $t = 0$ om variabeln är t).
- Vi får ett sk Begynnelsevärdesproblem (BVP):

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y) & \text{(ODE)} \\ y(0) = y_0 & \text{(BV)} \end{cases}$$

Exempel 2

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y'(x) = 2xy(x) & \text{(ODE)} \\ y(0) = 1 & \text{(BV)} \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = e^{x^2}$$

Ordinära differentialekvationer av högre ordning

Begynnelsevärdesproblem

- Ett begynnelsevärdesproblem av 3:dje ordningen kan skrivas som:

$$
\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y^{(3)}(x) = f(x, y, y', y'') & \text{(ODE)} \\ y(x_0) = \alpha & \text{(BV1)} \\ y'(x_0) = \beta & \text{(BV2)} \\ y''(x_0) = \gamma & \text{(BV3)} \end{cases} \tag{3}
$$

- Sätter vi $y_1 = y$, $y_2 = y'$ och $y_3 = y''$ kan (3) skrivas som:

$$
\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & \text{(ODE1)} \\ y_2'(x) = y_3(x), & \text{(ODE2)} \\ y_3'(x) = f(x, y_1, y_2, y_3), & \text{(ODE3)} \\ y_1(x_0) = \alpha & \text{(BV1)} \\ y_2(x_0) = \beta & \text{(BV2)} \\ y_3(x_0) = \gamma & \text{(BV3)} \end{cases}
$$

- Varje differentialekvation av ordning $n > 1$ kan skrivas som ett system av n st differentialekvationer av ordning 1.

Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen

Existens av lösning

Sats 1 (Cauchys sats)

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig så existerar en lösning till $y'(x) = f(x, y)$.

Sats 2

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig i alla punkter (x, y) : $a \leq x \leq b$, $y \in \mathbb{R}$, där a, b är ändliga och om f satisfierar ett Lipschitzvillkoret

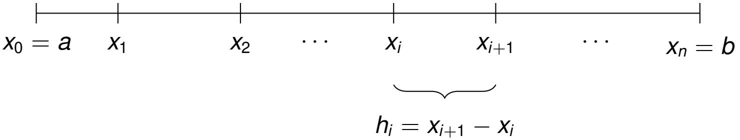
$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*|$$

för $a \leq x \leq b$ och alla y, y^*, så existerar en entydig lösning till BVP för varje begynnelsevärde $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in [a, b]$.
Konstanten L kallas Lipschitzkonstant.

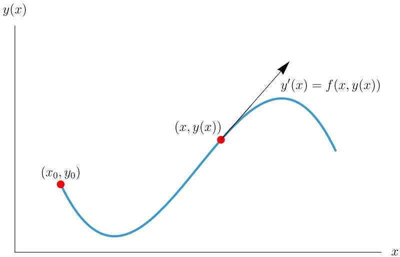
- Tyvärr uppfyller de flesta f inte något Lipschitzvillkor.
- Systemet $y' = Ay$ där A är en konstant matris har Lipschitzkonstanten $L = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen
Numeriska metoder

- Alla numeriska metoder ger punktvisa approximationer $y_i \approx y(x_i)$, vilket kallas numerisk lösning, i något intervall $[a, b]$ som är diskretiserat:



- Ofta väljs steglängden h som konstant (ekvidistant mesh) men det är inte nödvändigt.
- Avancerade algoritmer väljer h_i adaptivt vid x_i beroende på $f(x_i, y_i)$.
- Metoderna stegar sig fram med start i x_0 och levererar slutligen den numeriska lösningen som en följd av punkter (x_i, y_i).



Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen

Numeriska metoder

- De flesta stegmetoder är antingen härledda från eller kan analyseras med hjälp av:

Taylors formel

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + y^{(3)}(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \cdots$$
$$+ y^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + y^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!}, \quad \xi \in [x_0, x]$$

Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen

Taylors metod

Taylorutveckling kan även användas direkt för att hitta en approximativ lösning för x nära x_0.

Exempel 3

Bestäm en approximativ lösning till ODE:n genom att Taylorutveckla till ordning 3 kring $x = 0$:

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y'(x) = 1 - 3xy(x) & \text{(ODE)} \\ y(0) = 0 & \text{(BV)} \end{cases}$$

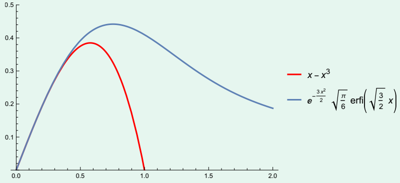
$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & & \\ y'(x) &= 1 - 3xy(x) \Rightarrow & y'(0) &= 1 \\ y''(x) &= -3y(x) - 3xy'(x) \Rightarrow & y''(0) &= 0 \\ y^{(3)}(x) &= -3y'(x) - 3y'(x) - 3xy''(x) \Rightarrow & y^{(3)}(0) &= -6 \end{aligned}$$

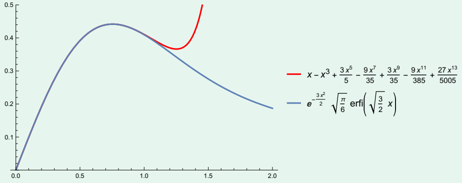
$$y(x) \approx y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + y^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} = x - x^3$$

Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen

Taylors metod

Exempel 3 (forts.)





- Lösningen ”håller” längre ut när vi ökar ordningen.
- Felet $y^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}$ är svårt att analysera eftersom derivatorna $y^{(k)}(x)$ bara är kända vid $x = x_0$. Metoden används normalt endast för x nära x_0.

Ordinära differentialekvationer av 1:a ordningen

Explicita och implicita stegmetoder

- Explicita metoder:
  Beräknar y_{i+1} endast baserat på y_i (och ev tidigare värden:)
  $$y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi_E(x_i, y_i, h)$$
  - Eulers metod
  - Heuns metod
  - Mittpunktsmetoden
  - Runge-Kuttas metod
- Implicita metoder:
  Beräknar y_{i+1} baserat på y_i och ϕ_I beräknad vid det okända värdet y_{i+1}:
  $$y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi_I(x_i, y_i, h, y_{i+1})$$
  - Implicit eulermetod
  - Implicit trapetsmetod
  - Implicit mittpunktsmetod

  Ger en ekvation (ofta icke-linjär), där y_{i+1} förekommer på båda sidor, som behöver lösas iterativt i varje tidssteg $\Rightarrow$ Dyrare per tidssteg men metoderna tillåter större steg.

Explicita metoder

Eulers metod

Vi söker en numerisk lösning till begynnelsevärdesproblemet:

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

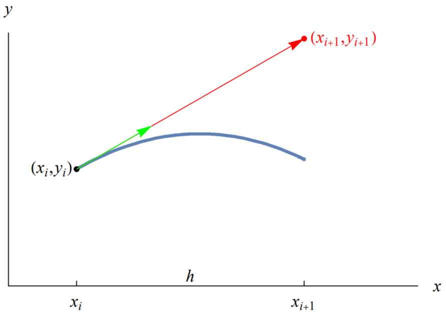
Eulers metod bygger på taylorutvecklingen trunkerad efter första derivatan.
Rekursionsformel:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h \cdot y'(x_i) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Metod:

1. Bestäm lämplig steglängd h
2. Starta i (x_0, y_0).
3. Beräkna tangentens riktning $y' = f(x_0, y_0)$ från (4).
4. Ta ett litet steg h i x-led genom att följa denna riktning dvs

$$x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$



5. Upprepa proceduren för $i = 2, 3, \ldots$ tills önskat x_{max} är nått.

Explicita metoder

Eulers metod: Feluppskattning och konvergens

Lokalt trunkeringsfel (e_L): $e_L = y_{i+1} - y(x_i + h)$ då $y_i = y(x_i)$.

- Fås genom att jämföra med taylorutvecklingen:

$$e_L = y(x_i) + hy'(x_i) - \underbrace{\left(y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \dots\right)}_{\text{Taylorutveckling}} = \mathcal{O}(h^2)$$

Globalt trunkeringsfel (e_G):

- Totala felet efter $N = (b-a)/h$ steg:

$$e_G \approx N \cdot e_L = \mathcal{O}(\frac{1}{h} \cdot h^2) = \mathcal{O}(h)$$

Konvergens:

- Konvergent om $|e_G| \to 0$ då $h \to 0 \Rightarrow$ mycket små h krävs för rimlig noggrannhet.

Stabilitet:

- En metod är stabil om en liten störning i indata (t.ex. avrundningsfel) resulterar i en liten störning i lösningen.
- Eulers metod är villkorligt stabil: Stabiliteten beror på steglängden h.
- Instabila lösningar kännetecknas av att y_i avviker alltmer från $y(x_i)$, ofta genom kraftiga (oscillerande) svängningar.

Explicita metoder

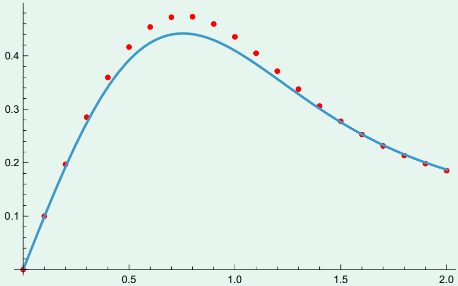
Eulers metod

Exempel 4

Bestäm en approximativ lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y'(x) = 1 - 3xy(x) & \text{(ODE)} \\ y(0) = 0 & \text{(BV)} \end{cases}$$

i intervallet $[0, 2]$ med Eulers metod.



Explicita metoder

Heuns metod

Metoden är en förfining av Eulers metod:

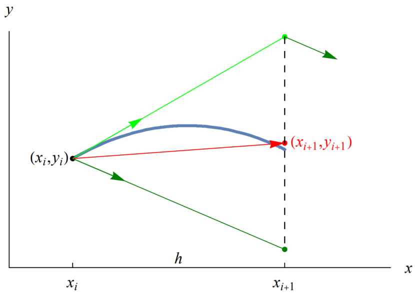
1. Beräkna ett provisoriskt y-värde genom att följa tangenten vid startpunkten (x_i, y_i):

   $$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + k_1 \quad \text{(Euler)}$$

2. Beräkna tangentens riktning vid den provisoriska slutpunkten $(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$:

   $$f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) = f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)) = f(x_i + h, y_i + k_1).$$

3. Använd medelvärdet av start- och sluttangenten som slutlig riktning.
4. Ta steget h med riktningsmedelvärdet för att få det korrekta y_{i+1}.



Explicita metoder

Heuns metod

Rekursionsformeln för Heuns metod kan nu skrivas med hjälp av tangenttillskotten k_1 och k_2:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{där} \quad \begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{cases}$$

k_1 och k_2 är den lokala förändringen i y i de båda punkterna.

Explicita metoder

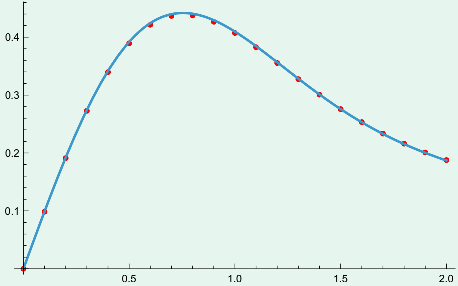
Heuns metod

Exempel 5

Bestäm återigen en approximativ lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y'(x) = 1 - 3xy(x) & \text{(ODE)} \\ y(0) = 0 & \text{(BV)} \end{cases}$$

i intervallet $[0, 2]$ men med Heuns metod.



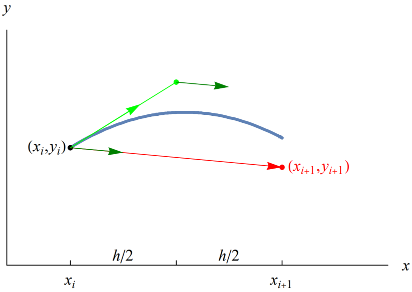
Explicita metoder

Mittpunktsmetoden

- En variant av Heuns metod men tar mittpunkten för det provisoriska y-värdet:

$$\tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

- Återvänder sedan till (x_i, y_i) och tar nästa steg längs mittpunktsriktningen:



$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \tfrac{h}{2}, \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}}\right) = y_i + hf\left(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

- Utnyttjar vi tangenttillskottet k_1 kan rekursionsformeln skrivas som:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_1}{2}\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{där} \quad k_1 = hf(x_i, y_i)$$

Explicita metoder

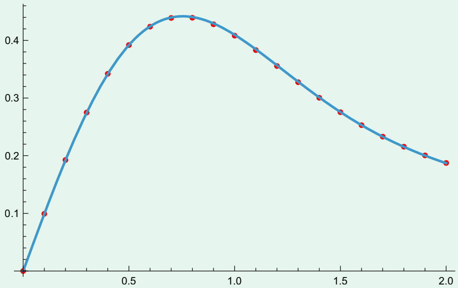
Mittpunktsmetoden

Exempel 6

Bestäm återigen en approximativ lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y'(x) = 1 - 3xy(x) & \text{(ODE)} \\ y(0) = 0 & \text{(BV)} \end{cases}$$

i intervallet $[0, 2]$ men med Mittpunktsmetoden.



Explicita metoder

Feluppskattning och konvergens: Heuns metod och Mittpunktsmetoden

- Heuns metod och Mittpunktsmetoden kan skrivas som:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 \quad \text{där} \quad \begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1) \end{cases}$$

- Genom att jämföra taylorutvecklingarna av y_{i+1} kring (x_i, y_i) och $y(x)$ kring x_i, för $x = x_{i+1}$, kan konstanterna $(a_1, a_2, \alpha, \beta)$ väljas så att skillnaden blir $\mathcal{O}(h^3)$.
- Lokalt trunkeringsfel:

$$e_L = \mathcal{O}(h^3)$$

- Globalt trunkeringsfel:

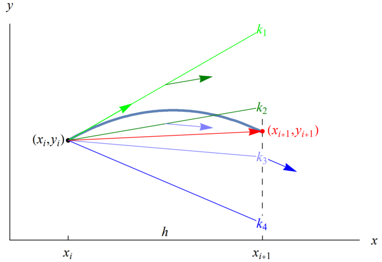
$$e_G = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h} \cdot h^3\right) = \mathcal{O}(h^2)$$

- Metoderna är av andra ordningen ($\mathcal{O}(h^2)$) och de är därmed betydligt noggrannare än Eulers metod, som är av första ordningen ($\mathcal{O}(h)$).

Explicita metoder

Runge-Kuttas metod

- Runge-Kutta-metoder (RK) är en familj av explicita numeriska metoder.
- Bygger på att beräkna ett vägt medelvärde av flera tangentriktningar inom ett tidssteg (h) för att uppnå hög noggrannhet.
- RK4 är en förfining av Mittpunktsmetoden och använder fyra tangenttillskott:



k_j	Riktning	Betydelse	Vikt (a_j)
k_1	$h \cdot f(x_i, y_i)$	Tangenten i startpunkten (Euler).	$\frac{1}{6}$
k_2	$h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$	Tangenten i halva steget med riktn. från k_1.	$\frac{2}{6}$
k_3	$h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$	Tangenten i halva steget med riktn. från k_2.	$\frac{2}{6}$
k_4	$h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$	Tangenten i slutpunkten.	$\frac{1}{6}$

- Rekursionsformel:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Explicita metoder

Runge-Kuttas metod: Feluppskattning och konvergens

- Vikterna (a_j) och provpunkter (α, β, etc.) väljs så att RK-metodens taylorutveckling matchar taylorutvecklingen av $y(x)$ kring x_i för $x = x_{i+1}$.
- För RK4 matchas koefficienterna upp till och med ordning 4.
- Lokalt trunkeringsfel:
$$e_L = \mathcal{O}(h^5)$$
- Globalt trunkeringsfel:
$$e_G = \mathcal{O}(h^4)$$

Anm: Eulers metod är en RK1-metod, Heuns metod och Mittpunktemetoden är RK2-metoder.

Explicita metoder

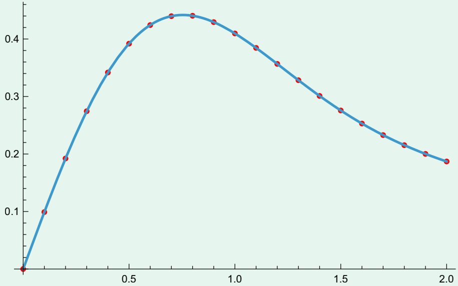
Runge-Kuttas metod

Exempel 7

Bestäm återigen en approximativ lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} y'(x) = 1 - 3xy(x) & \text{(ODE)} \\ y(0) = 0 & \text{(BV)} \end{cases}$$

i intervallet $[0, 2]$ men med Runge-Kutta-metoden (RK4).



Implicita metoder

- Explicita metoder utnyttjar framåtdifferens som approximation för derivatan:

$$f(x_i, y_i) = y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

- Implicita metoder baseras på bakåtdifferens:

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

- Implicit Eulermetod:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})), \ i = 0, 1, 2, ...$$

- Implicit Trapetsmetod:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right), \ i = 0, 1, 2, ...$$

- Implicit Mittpunktsmetod:

$$y_{i+1} = y_i + h\,f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right), \ i = 0, 1, 2, ...$$

Anm: y_{i+1} förekommer på båda sidor $\Rightarrow$ implicita metoder kräver att en ekvation löses i varje tidssteg. Detta gör dem beräkningsmässigt dyrare.

Implicita metoder

Stabilitet

Vi utgår från följande ODE (testfall):

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1 \tag{5}$$

- Den exakta lösningen $y(x) = e^{\lambda x}$ till (5) är

  $$\text{stabil (icke-växande) då } x \to \infty \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(\lambda) \leq 0.$$

- En numerisk metod kallas absolut stabil för givet $z = h\lambda$ om den numeriska lösningen y_k till (5) är begränsad när $k \to \infty$.
- Metodens stabilitetsområde A är mängden av alla $z = h\lambda$ för vilka metoden är absolut stabil.
- Metoden kallas A-stabil om dess stabilitetsområde täcker hela det vänstra halvplanet:

  $$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) \leq 0\} \subseteq A$$

För ett stabilt problem ($\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$) garanterar en A-stabil metod att den numeriska lösningen är stabil oavsett hur stor steglängd h som väljs.

Implicita metoder

Styva problem

Ett ODE-system kallas för ett styvt problem om det beskriver processer eller förlopp som utspelas under tidsintervall av mycket olika storleksordning dvs både snabbt avklingande (styva) och långsamt föränderliga (icke-styva).

Explicita Metoder:

- Begränsad stabilitetsregion - ej A-stabila.
- För att undvika numerisk instabilitet måste steglängden (h) anpassas till de snabba komponenterna i ODE:n.
  $\Rightarrow$ Kräver extremt litet h, vilket gör beräkningen ineffektiv för de långsamma komponenterna.

Implicita Metoder:

- Ofta A-stabila.
- Villkorslös stabilitet för styva problem. Snabba komponenter dämpas korrekt.
- Steglängden (h) kan baseras endast på noggrannhetskravet (de långsamma komponenterna).
- Varje steg är beräkningsmässigt dyrare men totala kostnaden mindre.

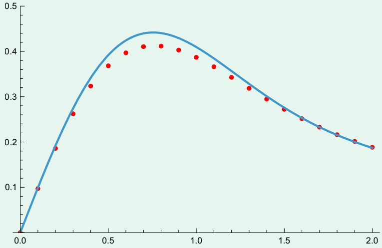
Implicita metoder

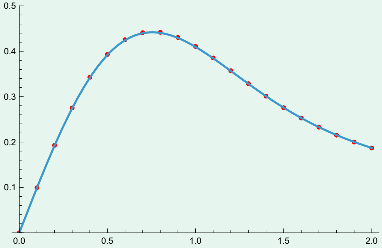
Exempel 8

Bestäm återigen en approximativ lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$(\text{BVP}) \quad \begin{cases} y'(x) = 1 - 3xy(x) & (\text{ODE}) \\ y(0) = 0 & (\text{BV}) \end{cases}$$

i intervallet $[0, 2]$ men med implicit eulermetod resp. mittpunktsmetod.





Anm: Explicit Euler ger systematisk överskattning medan implicit Euler ger systematisk underskattning för styva (snabbt avklingande) problem.