HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren, 035-167220
Marlena Nowaczyk, 072-5844353

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Fredagen den 17 januari 2025
Skrivtid: 9.00-14.00

Hjälpmedel: Miniräknare som lånas ut vid skrivningstillfället. Egen miniräknare är inte tillåten! *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt angivet svar. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Utnyttja mätserien

x	0	1	2
y	1	-1	3

för att

   (a) bestämma en linjär splinefunktion som interpolerar mätvärdena. *(2p)*

   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

2. (a) Visa att ekvationen $e^{-x} = 2x$ har exakt en rot x^* i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

   (b) Använd Newton-Raphsons metod med startvärdet $x_0 = 0.1$ för att bestämma approximationen x_2 till x^* genom att göra två iterationer "för hand". *(1p)*

   (c) Visa att fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ som svarar mot Newton-Raphsons metod för ekvationen i (a) konvergerar mot x^* om x_0 väljs i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

3. Beräkna ett närmevärde till integralen

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

   med Simpsons formel för ett n (antal delintervall) som ger närmevärdet minst 3 korrekta decimaler.
   För Simpsons formel är resttermen $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$. *(3p)*

4. Bestäm det egenvärde som ligger närmast 2 samt en motsvarande normerad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   med hjälp potensmetoden med en iteration och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1)$. *(2p)*

5. Använd Jacobis iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 0)$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}^{(2)}$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 &= 1. \end{cases}$$

   Motivera även varför $\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den exakta lösningen till ekvationssystemet då $k \to \infty$. *(3p)*

6. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = x + 3xy(x), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   Beräkna de första fem derivator av y och sen ett femtegradspolynom med hjälp av taylorutveckling

$$y(x) \approx y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^5}{5!} y^{(5)}(x_0).$$

   Slutligen bestäm ett approximativt värde $y(\frac{1}{2})$. *(3p)*

Vänd!

7. Studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 2 + xy(x), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

   (a) Använd explicita Eulers metoden och ta två steg med $h = 0.1$. *(2p)*

   (b) Använd implicita trapetsmetoden och ta ett steg med $h = 0.2$. *(2p)*

8. Bestäm extremvärden av funktionen $f(x, y) = x^2 + y$ då $x^2 - y^2 = 1$ genom att använda Lagrangeformulering. *(2p)*

9. Betrakta $\min(x^3 + 4x^2 + x)$: Använd Newtons metod, starta i $x_0 = -1$ och gör två iterationer för att hitta x-värde nära extrempunkten. *(2p)*

10. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) = 100x \\ y(0) = 1, \quad y(0.6) = 2, \end{cases}$$

i intervallet $[0, 0.6]$ med finita differensmetoden. Dela upp intervallet i tre lika bitar. *(4p)*

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Ansats:

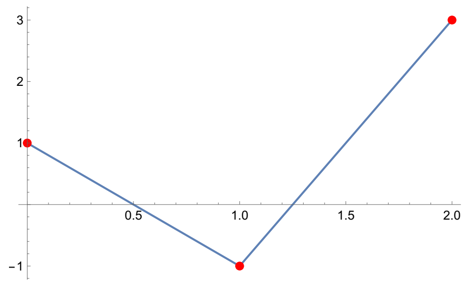
$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = c_0 + c_1(x-0), & 0 \le x < 1 \\ s_2(x) = d_0 + d_1(x-1), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Kontinuitets- och ändpunktsvillkoren på $s(x)$ ger nu

$$\begin{cases} s(0) = s_1(0) = c_0 = f(0) = 1 \\ s(1) = s_1(1) = c_0 + c_1 = s_2(1) = d_0 = f(1) = -1 \\ s(2) = s_2(2) = d_0 + d_1 = f(2) = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow (c_0, c_1, d_0, d_1) = (1, -2, -1, 4)$$

dvs

$$s(x) = \begin{cases} -2x+1, & 0 \le x < 1 \\ 4x-5, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix}\right)$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

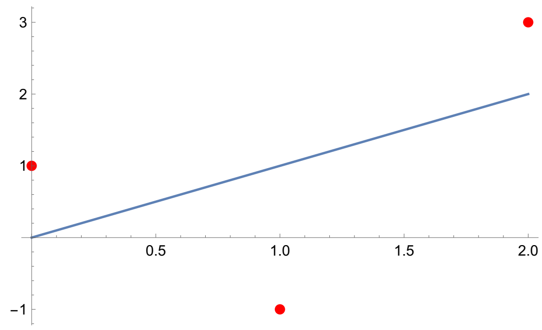
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs $y = x$.



2. (a) Med $f(x) = e^{-x} - 2x$ kan ekvationen skrivas som $f(x) = 0$. För $x \in I = [0, 1]$ har vi:

$$f'(x) = -e^{-x} - 2 < 0$$

dvs $f(x)$ är strängt avtagande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = 1 > 0$ och $f(1) = e^{-1} - 2 < 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe x^* i I.

(b) Iterationsformeln för Newton-Raphsons metod:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) = x_k - \frac{e^{-x_k} - 2x_k}{-e^{-x_k} - 2} = \frac{1 + x_k}{1 + 2e^{x_k}} = g(x_k)$$

med $x_0 = 0.1$ som startvärde ger efter 2 iterationer:

$$x_1 = g(x_0) = 0.342643...$$
$$x_2 = g(x_1) = 0.351723...$$

Mathematicas `NSolve`: 0.351734...

(c) Fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ konvergerar mot den sökta roten x^* om $|g'(x)| < 1$ i en omgivning av x^* som innehåller x_0. För $x \in [0, 1]$ har vi:

$$|g'(x)| = \left| \frac{1 - 2xe^x}{(1 + 2e^x)^2} \right| \leq \frac{2e^1 - 1}{(1 + 2e^0)^2} < \frac{2 \cdot 3 - 1}{(1 + 2)^2} = \frac{5}{9} < 1.$$

Väljer vi t.ex. $x_0 = 0.1$ kommer därför fixpunktsiterationen att konvergera mot x^*.

3. Felet ges av $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$ där $a = 0 \leq \xi \leq b = \frac{\pi}{2}$ och n (antal delintervall) är jämnt:

$$\left|R_n\right| = \left| -\frac{(\frac{\pi}{2})^5 \sin\xi}{180n^4} \right| \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{180n^4} < 0.5 \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow n > 3.210...$$

Simpsons formeln för närmaste större jämna heltal som är $n = 4$ ger nu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \approx \frac{b-a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b))$$
$$= \frac{\pi}{24}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2} \right) = 1.00013458...$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1.0001 \pm 0.5 \cdot 10^{-4}.$$

Anm: Integralens exakta värde är 1.

4. Att bestämma det egenvärde till A som ligger närmast $s = 2$ är ekvivalent med att bestämma det egenvärde till matrisen $A - sI$ som har minst absolutbelopp.

Om A är inverterbar har vi

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

Detta betyder att A och A^{-1} har samma egenvektorer och söker vi det egenvärde λ till A som har minst absolutbelopp kan vi istället beräkna det egenvärde till A^{-1} som har störst absolutbelopp. Vi kombinerar nu ovanstående:

$$A - sI = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - sI)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om λ_1 är det egenvärde till $(A-sI)^{-1}$ som har störst absolutbelopp ger en iteration med potensmetoden:

$$\boldsymbol{y}_1 = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1^{(1)} = \boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 7$$

$\lambda \approx 1/\lambda_1^{(1)} + s = \frac{1}{7} + 2 = \frac{15}{7} \approx 2.14$ är alltså det egenvärde till A som ligger närmast 2 och den motsvarande normerade egenvektorn $\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = \frac{1}{5}(3, -4) = (0.6, -0.8)$.
Mathematicas `Eigensystem`: $\lambda = 2.30278$, $\boldsymbol{x} = (0.608894, -0.793252)$.

5. Jacobis iterationsmetod:
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L+U)\boldsymbol{x}^{(k)})$$
där koefficientmatrisen A är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med L strikt undertriangulär, D diagonal och U strikt övertriangulär. Vi har alltså
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad L+U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Med startvektorn $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1,0)$ får vi
$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$
dvs $(x_1, x_2) \approx (1.5, 0.25)$.
Mathematicas `Solve`: $(x_1, x_2) = (\frac{7}{5}, \frac{1}{5}) = (1.4, 0.2)$.
$\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den sökta lösningen eftersom A är diagonaldominant dvs. diagonalelementen uppfyller:
$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ för alla } i.$$

6. Första fem derivator av funktionen y och deras värde för $x = 0$ är:
$$\begin{aligned}
&y'(x) = x + 3xy && y'(0) = 0 + 0 = 0 \\
&y''(x) = 1 + 3y + 3xy' && y''(0) = 1 + 3 + 0 = 4 \\
&y'''(x) = 3y' + 3y' + 3xy'' = 6y' + 3xy'' && y'''(0) = 0 + 0 = 0 \\
&y^{(4)}(x) = 6y'' + 3y'' + 3xy''' = 9y'' + 3xy''' && y^{(4)}(0) = 9 \cdot 4 + 0 = 36 \\
&y^{(5)}(x) = 9y''' + 3y''' + 3xy^{(4)} = 12y''' + 3xy^{(4)} && y^{(5)}(0) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$
Därför har vi att
$$\begin{aligned}
y(x) &\approx y(0) + xy'(0) + \frac{1}{2}x^2 y''(0) + \ldots + \frac{1}{5!}x^5 y^{(5)}(0) \\
&= 1 + x \cdot 0 + \frac{1}{2}x^2 \cdot 4 + \frac{1}{6}x^3 \cdot 0 + \frac{1}{24}x^4 \cdot 36 + \frac{1}{120}x^5 \cdot 0 \\
&= 1 + 2x^2 + \frac{3}{2}x^4.
\end{aligned}$$
Slutligen har vi att $f(\frac{1}{2}) \approx 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{32} = \frac{51}{32} \approx 1.594$.

7. Vi använder oss av funktionen $f(x,y) = 2 + xy$ och vi har att $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

   (a) För explicita Eulers metoden använder vi formler $x_{n+1} = x_n + h$ och $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Därför har vi för $h = 0.1$ att
$$\begin{aligned}
&x_1 = 1 + 0.1 = 1.1 && y_1 = 1 + 0.1(2 + 1 \cdot 1) = 1 + 0.3 = 1.3 \\
&x_2 = 1.1 + 0.1 = 1.2 && y_2 = 1.3 + 0.1(2 + 1.2 \cdot 1.3) \\
& && \quad = 1.3 + 0.343 = 1.643
\end{aligned}$$
   Eller med hjälp av tabellen:

x	y	$y' = f(x,y)$	hy'
1	1	3	0.3
1.1	1.3	3.43	0.343
1.2	1.643		

(b) För implicita trapetsmetoden använder vi formler $x_{n+1} = x_n + h$ och $y_{n+1} = y_0 + \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$. För $h = 0.2$ har vi att $x_1 = 1 + 0.2 = 1.2$ och

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}h(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)) \\
y_1 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2(2 + 1 \cdot 1 + 2 + 1.2y_1) \\
y_1 & 1 + 0.1(5 + 1.2y_1) \\
y_1 & 1.5 + 0.12y_1 \\
y_1 &= \frac{1.5}{0.88} = \frac{150}{88} \approx 1.705
\end{aligned}$$

8. Vi har att $f(x, y) = x^2 + y$ och $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$. Först bygger vi en Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y + \lambda(x^2 - y^2 - 1).$$

Sen bestämmer vi gradienten och har ekvationssystem:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 + \lambda) = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger att $x = 0$ eller $\lambda = -1$.
Om $x = 0$ då tredje ekvationen blir $-y^2 - 1 = 0$ som saknar lösningar.
Men om $\lambda = -1$ då andra ekvationen ger att $1 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ och tredje ekvationen blir då $x^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$ som ger att $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Stationära punkter är $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2})$
och $f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

* Med liten analys kan man visa att funktioner har i dessa punkter lokal minimum.

9. För Newtons metod ska vi använda formeln $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$.

Vi bestämmer först derivator till funktionen $f(x) = x^3 + 4x^2 + x$:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1, \quad f''(x) = 6x + 8.$$

För $x_0 = -1$, $f'(x_0) = f'(-1) = 3 - 8 + 1 = -4$, $f''(x_0) = f''(-1) = -6 + 8 = 2$ och

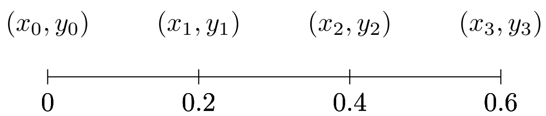
$$x_1 = -1 - \frac{-4}{2} = 1 + 2 = 1.$$

För $x_1 = 1$, $f'(1) = 3 + 8 + 1 = 12$, $f''(1) = 6 + 8 = 14$, alltså

$$x_2 = 1 - \frac{12}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 0.143.$$

Då $f\left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \frac{1}{7} = \ldots = \frac{78}{343} \approx 0.227$.

10. Låt oss börja med att skissa intervallet $I = [0, 0.6]$ fördelat i tre delar, alltså $h = 0.2$.



I bilden (x_i, y_i), där x_i och $y_i = y(x_i)$, är koordinater av de punkterna som vi har i approximationen (komma ihåg att vi känner redan $y_0 = 1$ och $y_3 = 2$).
Vi kommer att använda centraldifferens generella formler för y' och y'' :

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

I de två inre punkterna har vi följande ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + 4\,\dfrac{y_2 - y_0}{2h} = 100x_1 \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + 4\,\dfrac{y_3 - y_1}{2h} = 100x_2 \end{cases}$$

Vi stoppar in värdena $y_0 = 1$, $y_{0.6} = 2$ och $h = 0.2$ och förenklar ekvationerna:

$$\begin{cases} \dfrac{y_2 - 2y_1 + 1}{0.04} + 4\,\dfrac{y_2 - 1}{2 \cdot 0.2} = 20 \\ \dfrac{2 - 2y_2 + y_1}{0.04} + 4\,\dfrac{2 - y_1}{2 \cdot 0.2} = 40 \end{cases}$$

Eftersom $0.04 = \frac{1}{25}$ och $0.1 = \frac{1}{10}$, så ekvationer blir

$$\begin{cases} 25y_2 - 50y_1 + 25 + 10y_2 - 10 = 20 \\ 50 - 50y_2 + 25y_1 + 20 - 10y_1 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -50y_1 + 35y_2 = 5 \\ 15y_1 - 50y_2 = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10y_1 + 7y_2 = 1 \\ 3y_1 - 10y_2 = -6 \end{cases}$$

Med Cramers regeln har vi att

$$\det A = \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = 79,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -6 & -10 \end{vmatrix} = 32, \det A_2 = \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 57,$$

så lösningen blir

$$\begin{cases} y_1 = \frac{32}{79} \approx 0.405 \\ y_2 = \frac{57}{79} \approx 0.722. \end{cases}$$