HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren, 035-167220
Marlena Nowaczyk, 072-5844353

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Onsdagen den 10 januari 2024
Skrivtid: 9.00-14.00

Hjälpmedel: *Miniräknare som lånas ut vid skrivningstillfället. Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt angivet svar. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Utnyttja mätserien

x	0	1	2
y	1	2	0

för att

   (a) bestämma Newtons interpolationspolynom av grad 2 som interpolerar mätvärdena. *(2p)*

   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

2. Beräkna ett approximativ värde på integralen $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx$ med Simpsons formel för $n = 4$ och visa att närmevärdet har 4 korrekta decimaler.
   För Simpsons formel är resttermen $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$. *(3p)*

3. (a) Visa att ekvationen $\ln(1 + x) = 2x - 1$ har exakt en rot x^* i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

   (b) Bestäm en funktion $g(x)$ sådan att fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ konvergerar mot roten x^* i (a) om x_0 väljs i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

   (c) Skriv ett program som utnyttjar intervallhalveringsmetoden för att bestämma ett närmevärde till roten x^* i (a) med ett fel som är mindre än 10^{-6}. *(1p)*

4. Bestäm det egenvärde som har störst absolutbelopp samt en motsvarande normerad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

   med hjälp potensmetoden med en iteration och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (0, 1)$. *(2p)*

5. Använd Gauss-Seidels iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}^{(0)} = \frac{1}{2}(1, 0)$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}^{(2)}$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 &= 1. \end{cases}$$

   Motivera även varför $\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den exakta lösningen till ekvationssystemet då $k \to \infty$. *(3p)*

6. Studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) - 3x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (a) Använd implicita Eulers metoden och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

   (b) Använd Heuns metoden och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

   (c) Exakt lösning är $y(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 6x + 3\right)$. Vilken av de två metoder ger bättre resultat? Motivera ditt svar. *(1p)*

7. Betrakta $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x$. Sök en extrempunkt genom att använda Newtons metod. Börja i $x = 1$ och gör två iterationer. *(2p)*

8. Bestäm det minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ då $x + 2y - z = 6$ genom att använda Lagrangeformulering. *(2p)*

9. Sök $\min(x^2 + y^2)$ då $y = 3$ genom att använda yttre straffmetod. *(2p)*

10. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = 4x^2 - 3y(x) \\ y(0) = 0, \quad y(1.5) = 1 \end{cases}$$

   i intervallet $[0, 1.5]$ med finita differensmetoden. Dela upp intervallet i tre bitar. *(4p)*

Lycka till!

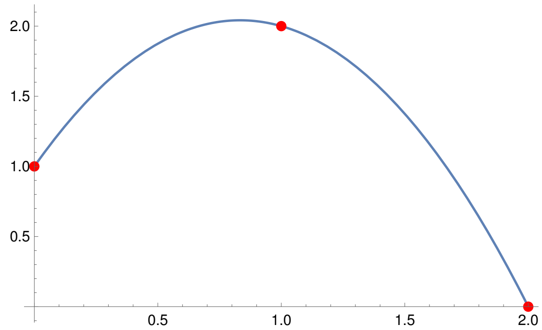
Lösningsförslag

1. (a) Vi bestämmer Newtons interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av mätserien:

Ansats: $p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) = c_0 + c_1(x - 0) + c_2(x - 0)(x - 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2(0) = c_0 = 1 \\ p_2(1) = c_0 + c_1 = 2 \Leftrightarrow c_1 = 1 \\ p_2(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad p_2(x) = 1 + (x - 0) - \frac{3}{2}(x - 0)(x - 1) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 1.$$



(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix}\right)$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T \boldsymbol{y}$ där

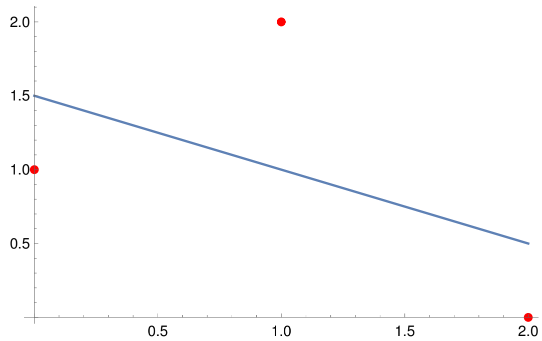
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dvs $y = \frac{1}{2}(-x + 3)$.



2. Simpsons formeln för $n = 4$ ger:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, dx \approx \frac{b - a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b))$$

$$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{1} + 4\sqrt{\frac{5}{4}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{\frac{7}{4}} + \sqrt{2}\right) = 1.218945...$$

Felet ges av $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$ där $a = 1 \le \xi \le b = 2$ och n (antal delintervall) är jämnt. Eftersom $n = 4$ och $D^4(\sqrt{x}) = -\frac{15}{16x^{\frac{7}{2}}}$ får vi

$$|R_n| = \left| \left(-\frac{(2-1)^5}{180 \cdot 4^4}\right)\left(-\frac{15}{16\xi^{\frac{7}{2}}}\right) \right| \le \frac{1}{180 \cdot 4^4}\frac{15}{16} = 0.0000203451... < 0.5 \cdot 10^{-4}$$

dvs vi har säkert 4 korrekta decimaler.

$$\therefore \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = 1.2189 \pm 0.5 \cdot 10^{-4}.$$

3. (a) Med $f(x) = \ln(1+x) - 2x + 1$ kan ekvationen skrivas som $f(x) = 0$. För $x \in I = [0,1]$ har vi:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 2 < 1 - 2 < 0$$

dvs $f(x)$ är strängt avtagande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = 1 > 0$ och $f(1) = \ln 2 - 2 + 1 = \ln 2 - 1 < \ln e - 1 = 1 - 1 = 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe x^* i I.

(b) Med $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln(1+x))$ kan ekvationen skrivas som $x = g(x)$. Fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ konvergerar mot den sökta roten x^* om $|g'(x)| < 1$ i en omgivning av x^* som innehåller x_0. För $x \in [0,1]$ har vi:

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{1+x}\right)\right| \le \frac{1}{2}\frac{1}{1+0} = \frac{1}{2} < 1.$$

Väljer vi t.ex. $x_0 = 0.5$ kommer därför fixpunktsiterationen att konvergera mot x^*.

(c) Följande kod utnyttjar intervallhalveringsmetoden och ger en approximation till roten med ett fel som är mindre än $\epsilon = 10^{-6}$:

```
In[ ]:= f[x_] = Log[1 + x] - 2 x + 1;
{a, b} = {0, 1};
eps = 10^(-6);
diff = 1;
While[diff > eps,
  c = 0.5*(a + b);
  If[f[a]*f[c] < 0, b = c, a = c];
  diff = b - a;
]
Print["Roten x = ", 0.5*(a + b)]
```

4. Om λ_1 är det egenvärde till A som har störst absolutbelopp ger en iteration med potensmetoden:

$$\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = (0.316228, -0.948683)$$

$$\lambda_1^{(1)} = \boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{y}_1 = (0,1)\cdot(1,-3) = -3$$

Mathematicas `Eigensystem`:
$\lambda_1 = -3.19258$ med motsvarande normerade egenvektor $(-0.189108, 0.981956)$.

5. Gauss-Seidels iterationsmetod:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (L+D)^{-1}(\boldsymbol{b} - U\boldsymbol{x}^{(k)})$$

där koefficientmatrisen A är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med L strikt undertriangulär, D diagonal och U strikt övertriangulär. Vi har alltså

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad L + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Med startvektorn $\boldsymbol{x}^{(0)} = \frac{1}{2}(1,0)$ får vi

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.166666... \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7/12 \\ -5/36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583333... \\ -0.136888... \end{pmatrix}$$

dvs $(x_1, x_2) \approx (0.58, -0.14)$.
Mathematicas `Solve`: $(x_1, x_2) = (\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}) \approx (0.571429, -0.142857)$.
$\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den sökta lösningen eftersom A är diagonaldominant dvs. diagonalelementen uppfyller:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ för alla } i.$$

6. Vi använder oss av funktionen $f(x,y) = 2y - 3x$ och vi har att $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

   (a) För implicita Eulers metoden använder vi formeln

   $$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1),$$

   där y_1 är obekant och $y_0 = 1$, $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$. Alltså har vi ekvationen

   $$\begin{aligned} y_1 &= 1 + 0.1(2y_1 - 3 \cdot 0.1) \\ y_1 &= 1 + 0.2y_1 - 0.03 \\ 0.8y_1 &= 0.97 \\ y_1 &= \frac{0.97}{0.8} = \frac{97}{80} \approx 1.2125. \end{aligned}$$

   (b) Först beräknar vi lutning i begynnelsepunkten, $f(x_0, y_0) = f(0,1) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2 = k_1$ och sen förflyttar vi till nästa punkten

   $$\begin{aligned} x_p &= x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1, \\ y_p &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot 2 = 1.2. \end{aligned}$$

   Nu beräknar vi lutning i den nya punkten, $f(x_p, y_p) = f(0.1, 1.2) = 2 \cdot 1.2 - 3 \cdot 0.1 = 2.4 - 0.3 = 2.1 = k_2$.
   Vidare har vi att $k = \dfrac{k_1 + k_2}{2} = \dfrac{2 + 2.1}{2} = 2.05$.
   Slutligen bestämmer vi
   $y_1 = y_0 + h \cdot k = 1 + 0.1 \cdot 2.05 = 1 + 0.205 = 1.205$.

   (c) Eftersom $y(0.1) = \frac{1}{4}(e^{2 \cdot 0.1} + 6 \cdot 0.1 + 3) = \frac{1}{4}(e^{0.2} + 0.6 + 3) \approx 1.2053507$, då Heuns metoden ger bättre resultat, ty lösning 1.205 stämmer upp till tre decimala platser, medan lösning 1.2125 från implicit Eulers metoden stämmer upp till endast två decimala platser.

7. För Newtons metod ska vi använda formeln $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$.

   Vi bestämmer först derivator till funktionen $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x$:

   $$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5, \quad f''(x) = 6x - 10.$$

   För $x_0 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 3 - 10 + 5 = -2$, $f''(x_0) = f''(1) = 6 - 10 = -4$ och

   $$x_1 = 1 - \frac{-2}{-4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   För $x_1 = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = 3 \cdot \frac{1}{4} - 10 \cdot \frac{1}{2} + 5 = \frac{3}{4}$, $f''(\frac{1}{2}) = 6 \cdot \frac{1}{2} - 10 = -7$, alltså

   $$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{4}}{-7} = \frac{1}{2} + \frac{3}{28} = \frac{17}{28} \approx 0.6071.$$

   Då $f\left(\frac{17}{28}\right) = \left(\frac{17}{28}\right)^3 - 5\left(\frac{17}{28}\right)^2 + 5\left(\frac{17}{28}\right)^3 = \ldots = \frac{31093}{28^3} \approx 1.416$.

8. Vi har att $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ och $g(x,y,z) = x + 2y - z - 6$. Först bygger vi en Lagrangefunktion

   $$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y - z - 6).$$

   Sen bestämmer vi gradienten och har ekvationssystem:

   $$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 2z - \lambda = 0 \\ x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ \lambda = -y \Rightarrow y = 2x \\ \lambda = 2z \Rightarrow z = -x \\ x + 4x + x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

   Slutligen $f(1, 2, -1) = 1 + 4 + 1 = 6$.

9. Vi har att
$f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = y - 3$ och vi skapar funktion

$$P((x,y),r) = f(x,y) + \frac{1}{r} g(x,y)^T g(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{r}(y-3)^2.$$

Gradienten är

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y + \frac{1}{r} \cdot 2(y-3) \end{pmatrix}$$

och $\nabla f = 0$ om $2x = 0$ och $2y + \frac{1}{r} \cdot 2(y-3) = 0$.
Vi att $x = 0$ och att $2y + \frac{1}{r} \cdot 2(y-3) = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{1+r} \to 3$ då $r \to 0$.
Slutligen $f_{\min}(0,3) = 9$.

10. Låt oss börja med att skissa intervallet $I = [0, 1.5]$ fördelat i tre delar, alltså $h = 0.5$.

$(0, y_0)$ $(0.5, y_{0.5})$ $(1, y_1)$ $(1.5, y_{1.5})$

0 0.5 1 1.5

I bilden (i, y_i), där $y_i = y(i)$, är koordinater av de punkterna som vi har i approximationen (komma ihåg att vi känner redan $y_0 = 0$ och $y_{1.5} = 1$).
Vi kommer att använda centraldifferens generella formler för y' och y'' :

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

I de två inre punkterna har vi följande ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 - 2y_{0.5} + y_0}{0.25} + \dfrac{y_1 - y_0}{1} = 4 \cdot 0.25 - 3y_{0.5} \\ \dfrac{y_{1.5} - 2y_1 + y_{0.5}}{0.25} + \dfrac{y_{1.5} - y_{0.5}}{1} = 4 - 3y_1. \end{cases}$$

Vi stoppar in värdena $y_0 = 0$ och $y_{1.5} = 1$:

$$\begin{cases} 4y_1 - 8y_{0.5} + 4 \cdot 0 + y_1 - 0 = 1 - 3y_{0.5} \\ 4 \cdot 1 - 8y_1 + y_{0.5} + 1 - y_{0.5} = 4 - 3y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5y_{0.5} + 5y_1 = 1 \\ 3y_{0.5} - 5y_1 = -1 \end{cases}$$

så $2y_{0.5} = 0 \Rightarrow y_{0.5} = 0$ och därför $5y_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{5}$.