HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren, 035-167220
Marlena Nowaczyk, 072-5844353

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Torsdagen den 12 januari 2023
Skrivtid: 9.00-14.00

Hjälpmedel: *Miniräknare som lånas ut vid skrivningstillfället. Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt angivet svar. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Utnyttja mätserien

x	0	1	2
y	1	3	2

för att anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

2. Beräkna ett närmevärde till integralen

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \; dx$$

med Simpsons formel för ett n (antal delintervall) som ger närmevärdet minst 3 korrekta decimaler. För Simpsons formel är resttermen $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$. *(3p)*

3. (a) Visa att ekvationen $f(x) = e^x - 6x = 0$ har exakt en rot x^* i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*
   (b) Använd Newton-Raphsons metod med startvärdet $x_0 = 0.1$ för att bestämma approximationen x_2 till x^* genom att göra två iterationer "för hand". *(2p)*
   (c) Visa att fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ som svarar mot Newton-Raphsons metod för ekvationen i (a) konvergerar mot x^* om x_0 väljs i intervallet $[0, 1]$. *(2p)*

4. Använd Gauss-Seidels iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}^{(0)} = \frac{1}{2}(1, -1)$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}^{(1)}$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 &= 1. \end{cases}$$

Motivera även varför $\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den exakta lösningen till ekvationssystemet då $k \to \infty$. *(2p)*

5. Bestäm det egenvärde som ligger närmast -2 och en motsvarande normerad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

med hjälp av skiftad invers potensmetod med en iteration och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (0, 1)$. *(3p)*

6. Studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) - x, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

   (a) Använd explicita Eulers metoden och ta två steg med $h = 0.1$. *(3p)*
   (b) Använd implicita trapetsmetoden och ta ett steg med $h = 0.2$. *(2p)*

7. Betrakta $\min(2x^4 + x^2 + 3x + 1)$. Använd Newtons metod, starta i $x = 1$ och gör två iterationer. *(2p)*

8. Bestäm det minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 3x^2 + xy + y^2$ då $x + y = 2$ genom att använda Lagrangeformulering. *(2p)*

9. Sök extrempunkt till $\min(x^3 + 5x)$ då $x \geqslant 2$ genom att använda barriär straffmetod. *(2p)*

10. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x \\ y(0) = 0, \quad y(6) = 2 \end{cases}$$

i intervallet $[0, 6]$ med finita differensmetoden. Dela upp intervallet i tre bitar. *(4p)*

Lycka till!

Lösningsförslag

1. Parametrarna $\boldsymbol{p} = \binom{k}{m}$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

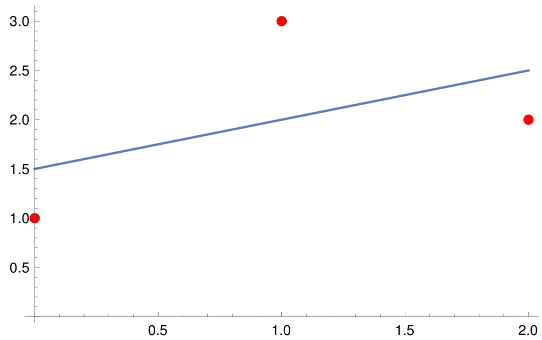
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dvs $y = \dfrac{1}{2}(x+3)$.



2. Felet ges av $R_n = -\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$ där $a = 0 \leq \xi \leq b = \frac{\pi}{2}$ och n (antal delintervall) är jämnt. Eftersom $D^4(\cos x) = \cos x$ får vi

$$|R_n| = \left| \frac{(\frac{\pi}{2} - 0)^5}{180n^4} \cos\xi \right| \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{180n^4} < 0.5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow n > 3.21062...$$

dvs för $n = 4$ har vi säkert 3 korrekta decimaler. Simpsons formeln för $n = 4$ ger nu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \approx \frac{b-a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b))$$
$$= \frac{\pi}{24}\left(\cos 0 + 4\cos\frac{\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{2}\right) = 1.00013...$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1.000 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Anm: Integralens exakta värde är 1.

3. (a) För $x \in I = [0, 1]$ har vi:

$$f'(x) = e^x - 6 < e^1 - 6 < 0$$

dvs $f(x)$ är strängt avtagande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = e > 0$ och $f(1) = e^1 - 6 < 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe x^* i I.

(b) Iterationsformeln för Newton-Raphsons metod:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) = \frac{e^{x_k}(x_k - 1)}{e^{x_k} - 6} = g(x_k)$$

med $x_0 = 0.1$ som startvärde ger efter 2 iterationer:

$$x_1 = g(x_0) = 0.203205...$$
$$x_2 = g(x_1) = 0.204481...$$

Mathematicas `NSolve`: 0.204481...

(c) Fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ konvergerar mot den sökta roten x^* om $|g'(x)| < 1$ i en omgivning av x^* som innehåller x_0. För $x \in [0,1]$ har vi:

$$|g'(x)| = \left|\frac{e^x(e^x - 6x)}{(e^x-6)^2}\right| \le \left|\frac{e^x}{e^x - 6}\right| < \left|\frac{e^x}{3-6}\right| = \frac{e^x}{3} < \frac{e^1}{3} < 1.$$

där vi utnyttjade att $|e^x - 6x| \le |e^x - 6|$ i intervallet. Väljer vi t.ex. $x_0 = 0.5$ kommer därför fixpunktsiterationen att konvergera mot x^*.

4. Gauss-Seidels iterationsmetod:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (L+D)^{-1}(\boldsymbol{b} - U\boldsymbol{x}^{(k)})$$

där koefficientmatrisen A är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med L strikt undertriangulär, D diagonal och U strikt övertriangulär. Vi har alltså

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad L + D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Med startvektorn $\boldsymbol{x}^{(0)} = \frac{1}{2}(1,-1)$ får vi

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -5/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ -0.3125 \end{pmatrix}$$

dvs $(x_1, x_2) \approx (0.38, -0.31)$.
$\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den sökta lösningen eftersom A är diagonaldominant dvs. diagonalelementen uppfyller:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ för alla } i.$$

Mathematicas `Solve`: $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

5. Att bestämma det egenvärde till A som ligger närmast $s = -2$ är ekvivalent med att bestämma det egenvärde till matrisen $A - sI$ som har minst absolutbelopp.

Om A är inverterbar har vi

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

Detta betyder att A och A^{-1} har samma egenvektorer och söker vi det egenvärde λ till A som har minst absolutbelopp kan vi istället beräkna det egenvärde till A^{-1} som har störst absolutbelopp. Vi kombinerar nu ovanstående:

$$A - sI = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - sI)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Om λ_1 är det egenvärde till $(A - sI)^{-1}$ som har störst absolutbelopp ger en iteration med potensmetoden:

$$\boldsymbol{y}_1 = (A - sI)^{-1}\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 5$$

$\lambda \approx 1/\lambda_1^{(1)} + s = \frac{1}{5} - 2 = -\frac{9}{5} = -1.8$ är alltså det egenvärde till A som ligger närmast -2 och den motsvarande normerade egenvektorn $\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2,5) \approx (-0.371, 0.928)$.
Mathematicas `Eigensystem`: $\lambda = -1.82843$, $\boldsymbol{x} = (0.382683, -0.92388)$.

6. (a) Vi använder oss av funktionen $f(x,y) = 3y - x$ och vi har att $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.
Först beräknar vi riktningen i begynnelsepunkten, $f(x_0, y_0) = f(1,1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ och sen förflyttar vi till nästa punkten

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1 \\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot 2 = 1.2 \end{cases}$$

Nu beräknar vi riktningen i den nya punkten, $f(x_1, y_1) = f(1.1, 1.2) = 3 \cdot 1.2 - 1.1 = 2.5$ och förflyttar vi till nästa punkten

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2 \\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.2 + 0.1 \cdot 2.5 = 1.45 \end{cases}$$

Eller med hjälp av tabellen:

x	y	y'	hy'
1	1	2	0.2
1.1	1.2	2.5	0.25
1.2	1.45		

(b) För implicita trapetsmetoden använder vi formeln

$$y_1 = y_0 + h\,\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}$$

där y_1 är obekant och $y_0 = 1$, $h = 0.2$, $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2$. Alltså har vi ekvationen

$$y_1 = 1 + 0.2\,\frac{3 - 1 + 3y_1 - 1.2}{2}$$

$$y_1 = 1 + 0.1(0.8 + 3y_1) \Rightarrow y_1 = 1.08 + 0.3y_1$$

$$y_1 = \frac{1.08}{0.7} = \frac{108}{70} \approx 1.543$$

7. För Newtons metod ska vi använda formeln $x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$.

Vi bestämmer först derivator till funktionen $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3x + 1$:

$$f'(x) = 8x^3 + 2x + 3, \quad f''(x) = 24x^2 + 2.$$

För $x_0 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 8 + 2 + 3 = 13$, $f''(x_0) = f''(1) = 24 + 2 = 26$ och

$$x_1 = 1 - \frac{13}{26} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

För $x_1 = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = 8 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 5$, $f''(\frac{1}{2}) = 24 \cdot \frac{1}{4} + 2 = 8$, alltså

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Då $f_{\min}(-\frac{1}{8}) = 2 \cdot \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^2} + 3 \cdot (-\frac{1}{8}) + 1 = \ldots = \frac{1313}{2048} \approx 0.641$.

8. Vi har att $f(x, y) = 3x^2 + xy + y^2$ och $g(x, y) = x + y - 2$. Först bygger vi en Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 3x^2 + xy + y^2 + \lambda(x + y - 2).$$

Sen bestämmer vi gradienten och har ekvationssystem:

$$\begin{cases} 6x + y + \lambda = 0 \\ x + 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y + \lambda = 0 \\ 6x + y = x + 2y \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y + \lambda = 0 \\ y = 5x \\ x + 5x - 2 = 0 \end{cases}$$

Därför $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{3}$ och $\lambda = -\frac{11}{3}$.
Slutligen $f(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{25}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}$.

9. Problemet kan skrivas som $\begin{cases} \min(x^3 + 5x) \\ 2 - x \leqslant 0 \end{cases}$, alltså antar vi att $f(x) = x^3 + 5x$ och $g(x) = 2 - x$. För barriär straffmetod kommer vi att bygga en funktion

$$P(x, r) = f(x) - r\ln(-g(x)) = x^3 + 5x - r\ln(x - 2).$$

Vi söker en stationär punkt, genom att lösa ekvationen $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$:

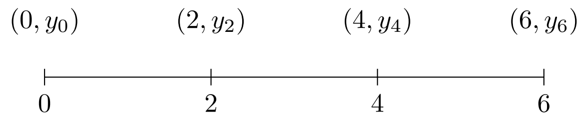
$$3x^2 + 5 - r\frac{1}{x - 2} = 0.$$

Löser vi ut $r(x)$:

$$r = (3x^2 + 5)(x - 2)$$

och när $r \to 0$, då $x = 2$, och $f(2) = 8 + 10 = 18$. Därför funktionen f antar det minsta värdet 18 i det givna området då $x = 2$.

10. Låt oss börja med att skissa intervallet $I = [0, 6]$ fördelat i tre delar, alltså $h = 2$.



I bilden (i, y_i), där $y_i = y(i)$, är koordinater av de punkterna som vi har i approximationen (komma ihåg att vi känner redan $y_0 = 0$ och $y_6 = 2$).
Vi kommer att använda centraldifferens generella formler för y' och y'' :

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

I de två inre punkterna har vi följande ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{y_4 - 2y_2 + y_0}{2^2} - 2\dfrac{y_4 - y_0}{2 \cdot 2} + 2y_2 = 2 \\ \dfrac{y_6 - 2y_4 + y_3}{2^2} - 2\dfrac{y_6 - y_2}{2 \cdot 2} + 2y_4 = 4. \end{cases}$$

Vi stoppar in värdena $y_0 = 0$ och $y_6 = 2$ och multiplicerar ekvationen med 4:

$$\begin{cases} y_4 - 2y_2 + 0 - 2y_4 + 0 + 8y_2 = 8 \\ 2 - 2y_4 + y_2 - 4 + 2y_2 + 8y_4 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y_2 - y_4 = 8 \\ 3y_2 + 6y_4 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y_2 - y_4 = 8 \\ y_2 + 2y_4 = 6 \end{cases}$$

Lösningen blir

$$\begin{cases} y_2 = \frac{22}{13} \approx 1.69 \\ y_4 = \frac{28}{13} \approx 2.15. \end{cases}$$