HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren, 035-167220
Marlena Nowaczyk, 072-5844353

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Fredagen den 14 januari 2022
Skrivtid: 9.00-14.00

Hjälpmedel: *Miniräknare. Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt angivet svar. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Utnyttja mätserien

x	0	1	2
y	2	1	4

för att

   (a) bestämma Newtons interpolationspolynom av grad 2 som interpolerar mätvärdena. *(2p)*

   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

2. (a) Visa att ekvationen $e^{-x} = 2x - 1$ har exakt en rot x^* i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

   (b) Bestäm en funktion $g(x)$ sådan att fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ konvergerar mot roten x^* till ekvationen i (a) om x_0 väljs i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

   (c) Skriv ett program som utnyttjar fixpunktsiterationen i (b) för att bestämma ett närmevärde till x^* med ett fel som är mindre än 10^{-6}. *(1p)*

3. Beräkna ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

med Simpsons formel för ett n (antal delintervall) som ger närmevärdet minst 3 korrekta decimaler. För Simpsons formel är resttermen $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$. *(3p)*

4. Bestäm det egenvärde som har minst absolutbelopp och en motsvarande normerad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

med hjälp av potensmetoden med två iterationer och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1)$. *(3p)*

5. Använd Jacobis iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, \frac{1}{2})$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}^{(2)}$ till ekvationssystemet *(2p)*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &= 1. \end{cases}$$

6. Studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 2x + y(x), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

   (a) Använd explicita mittpunktsmetoden och ta ett steg med $h = 0.2$. *(2p)*

   (b) Använd Eulers implicita metod och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

7. Betrakta $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$. Skriv ett program som utnyttjar Bolzanos metod för att hitta en lokal **maxpunkt** i intervallet $[0, 2]$. Visa de två första stegen av Bolzanos metod i det fallet. *(3p)*

8. Bestäm det minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2 + 3x + y^2$ då $y = 2x$ genom att använda Lagrangeformulering. *(2p)*

9. Sök extrempunkt till funktionen $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2$ genom att använda steepest descent metoden med dämpade stegfaktorn $\alpha_k = 0.1$ Börja i punkten $(2, 3)$ och visa de tre första stegen. *(2p)*

10. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) = x \\ y(0) = 0, \quad y(1.5) = 2 \end{cases}$$

i intervallet $[0, 1.5]$ med finita differensmetoden. Dela upp intervallet i tre bitar. *(4p)*

Lycka till!

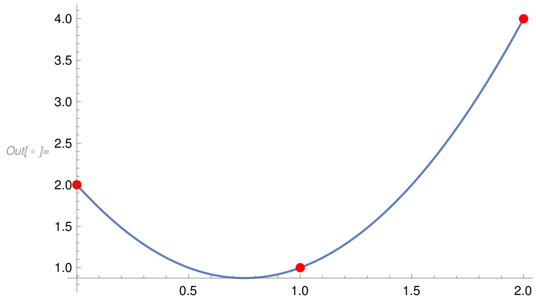
Lösningsförslag

1. (a) Vi bestämmer Newtons interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av mätserien:

$$\text{Ansats:}\quad p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) = c_0 + c_1(x - 0) + c_2(x - 0)(x - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2(0) = c_0 = 2 \\ p_2(1) = c_0 + c_1 = 1 \Leftrightarrow c_1 = -1 \\ p_2(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 4 \Leftrightarrow c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore\quad p_2(x) = 2 - (x - 0) + 2(x - 0)(x - 1) = 2x^2 - 3x + 2.$$



(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix}\right)$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

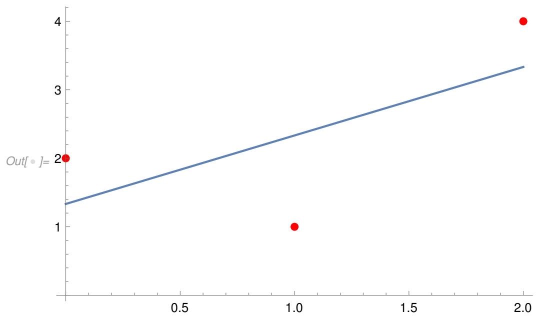
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dvs $y = x + \dfrac{4}{3}$.



2. (a) Med $f(x) = e^{-x} - 2x + 1$ kan ekvationen skrivas som $f(x) = 0$. För $x \in I = [0, 1]$ har vi:

$$f'(x) = -e^{-x} - 2 < 0$$

dvs $f(x)$ är strängt avtagande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = 2 > 0$ och $f(1) = e^{-1} - 2 + 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe x^* i I.

(b) Med $g(x) = \dfrac{e^{-x} + 1}{2}$ kan ekvationen skrivas som $x = g(x)$. Fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ konvergerar mot den sökta roten x^* om $|g'(x)| < 1$ i en omgivning av x^* som innehåller x_0. För $x \in [0, 1]$ har vi:

$$|g'(x)| = \left|\frac{-e^{-x}}{2}\right| = \frac{1}{2e^x} \leq \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2} < 1.$$

Väljer vi t.ex. $x_0 = 0.5$ kommer därför fixpunktsiterationen att konvergera mot x^*.

(c) Följande program i Mathematica ger en approximation för roten till $e^{-x} = 2x - 1$ med ett fel som är mindre än $\epsilon = 10^{-6}$:

```
g[x_] := (Exp[-x] + 1) / 2;
epsilon = 10 ^ (-6);
diff = 1;
xold = 0.5;
While[diff > epsilon,
  xnew = g[xold];
  diff = Abs[xnew - xold];
  xold = xnew;
 ];
Print[xnew]
```

3. Felet ges av $R_n = -\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^4(\xi)$ där $a = 0 \le \xi \le b = 1$ och n (antal delintervall) är jämnt. Eftersom $D^4(e^x) = e^x$ får vi

$$\left|R_n\right| = \left|\frac{(1-0)^5}{180n^4} e^{\xi}\right| \le \frac{e^1}{180n^4} < \frac{3}{180n^4} < 0.5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow n > 2.4028...$$

dvs för $n = 4$ har vi säkert 3 korrekta decimaler. Simpsons formeln för $n = 4$ ger nu:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x\,dx &\approx \frac{b-a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b)) \\ &= \frac{1}{12}(e^0 + 4e^{0.25} + 2e^{0.5} + 4e^{0.75} + e^1) = 1.7183... \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^1 e^x\,dx = 1.718 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Anm: Integralens exakta värde är $e - 1 = 1.718281828...$

4. Om A är inverterbar har vi

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

Detta betyder att A och A^{-1} har samma egenvektorer och söker vi det egenvärde λ till A som har minst absolutbelopp kan vi istället beräkna det egenvärde till A^{-1} som har störst absolutbelopp. Vi har:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Om nu λ_1 är det egenvärde till A^{-1} som har störst absolutbelopp ger två iterationer med potensmetoden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= A^{-1}\boldsymbol{x_0} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = \tfrac{1}{5}(3, -4) \\ \lambda_1^{(1)} &= \boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{7}{5} \\ \boldsymbol{y}_2 &= A^{-1}\boldsymbol{x_1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|} = \tfrac{1}{\sqrt{13}}(2, -3), \\ \lambda_1^{(2)} &= \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{18}{25}. \end{aligned}$$

$\lambda \approx 1/\lambda_1^{(2)} = \frac{25}{18} \approx 1.39$ är alltså det egenvärde till A som har minst absolutbelopp och den motsvarande normerade egenvektorn $\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3) \approx (0.55, -0.83)$.

Mathematicas `EigenSystem`: $\lambda = 1.38197$ med motsvarande normerade egenvektor $(0.525731, -0.850651)$.

5. Jacobis iterationsmetod:
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L+U)\boldsymbol{x}^{(k)})$$
där koefficientmatrisen A är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med L strikt undertriangulär, D diagonal och U strikt övertriangulär. Vi har alltså
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L + U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Med startvektorn $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 1/2)$ får vi
$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 5/12 \end{pmatrix}$$
dvs $(x_1, x_2) \approx (0.17, 0.42)$.
Mathematicas `Solve`: $(x_1, x_2) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

6. (a) Vi använder oss av funktionen $f(x, y) = 2x + y$ och vi har att $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $h = 0.2$.
Först beräknar vi riktningen i begynnelsepunkten som $f(x_0, y_0) = 2{\cdot}0{+}2 = 2$ och sen förflyttar vi till mittpunkten enligt formeln
$$\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f'(x_0, y_0)\right) = (0 + 0.1, 2 + 0.1 \cdot 2) = (0.1, 2.2).$$
I den punkten bestämmer vi värdet för tangentriktning
$$f(0.1, 2.2) = 2 \cdot 0.1 + 2.2 = 2.4.$$
Nu tar vi hela steget $h = 0.2$ från begynnelsepunkt med tangentriktning från mittpunkten och får vi
$$(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + hf'(x_{0.5}, y_{0.5})) = (0 + 0.2, 2 + 0.2 \cdot 2.4) = (0.2, 2.48).$$
Eller med hjälp av tabellen:

x	y	y'	hy'
$\underline{0}$	2	2	0.4
0.1	2.2	2.4	0.48
$\underline{0.2}$	2.48		

(b) För Eulers implicita metoden använder vi formeln
$$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1)$$
där y_1 är obekant och $y_0 = 2$, $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$. Alltså har vi ekvationen
$$y_1 = 2 + 0.1 \cdot (2 \cdot 0.1 + y_1)$$
$$0.9y_1 = 2.02 \Rightarrow y_1 = \frac{202}{90} \approx 2.24 \text{ (3 s.f.)}$$

7. Vi börjar med $I = [a, b] = [0, 2]$ och mittpunkten $c = \frac{1}{2}(a + b)$.
Notera först att vi letar efter en **maxpunkt**, så anpassar vi villkor så att:
   - om $f'(c) > 0$ betyder att funktionen är stigande och maxpunkten måste finnas efter c, så väljer vi som ett nytt intervall $I = [c, b]$,
   - om $f'(c) \leqslant 0$ betyder att funktionen är avtagande och maxpunkten måste finnas innan c, så väljer vi som ett nytt intervall $I = [a, c]$.

```
In[◦]:= f[x_] := x^3 - 5 x^2 + 6 x
        a = 0; b = 2;
        Do[c = 0.5 (a + b);
         Print[{a, c, b}]; If[f'[c] > 0, a = c, b = c], 10]

{0, 1., 2}
{0, 0.5, 1.}
{0.5, 0.75, 1.}
{0.75, 0.875, 1.}
{0.75, 0.8125, 0.875}
{0.75, 0.78125, 0.8125}
{0.78125, 0.796875, 0.8125}
{0.78125, 0.789063, 0.796875}
{0.78125, 0.785156, 0.789063}
{0.78125, 0.783203, 0.785156}
```

Om $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, så $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$ och de två första stegen ser ut som:

1) $I = [0, 2]$, $c = 1$, $f'(1) = 3 - 10 + 6 = -1 < 0$, så väljer vi ett nytt intervall $I = [0, 1]$,
2) $I = [0, 1]$, $c = 0.5$, $f'(0.5) = 3 \cdot 0.25 - 10 \cdot 0.5 + 6 = 1.75 > 0$, så väljer vi ett nytt intervall $I = [0.5, 1]$.

8. Vi har att $f(x, y) = x^2 + 3x + y^2$ och $g(x, y) = 2x - y$. Först bygger vi en Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + 3x + y^2 + \lambda(2x - y).$$

Sen bestämmer vi gradienten och har ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x + 3 + 2\lambda = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x \\ \lambda = 2y = 4x \\ 2x + 3 + 8x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -0.3 \\ y = -0.6 \\ \lambda = -1.2 \end{cases}$$

Slutligen $f(-0.3, -0.6) = (-0.3)^2 + 3(-0.3) + (-0.6)^2 = 0.09 - 0.9 + 0.36 = -0.45$.

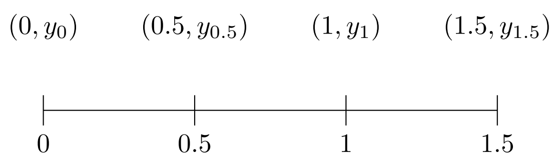
9. Om $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2$, då gradienten är $\nabla f = (4x - 2y, -2x + 2y)$. Vi har också att $(x_0, y_0) = (2, 3)$, $\alpha_k = 0.1$ och formeln för steepest descent metoden är

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) - \alpha_k \nabla f(x_k, y_k).$$

De tre första stegen ser ut som:

1) $\nabla f(x_0, y_0) = (8 - 6, -4 + 6) = (2, 2)$
och $(x_1, y_1) = (2, 3) - 0.1(2, 2) = (1.8, 2.8)$,
2) $\nabla f(x_1, y_1) = (7.2 - 5.6, -3.6 + 5.6) = (1.6, 2)$
och $(x_2, y_2) = (1.8, 2.8) - 0.1(1.6, 2) = (1.64, 2.6)$,
3) $\nabla f(x_2, y_2) = (6.56 - 5.2, -3.28 + 5.2) = (1.36, 1.92)$
och $(x_3, y_3) = (1.64, 2.6) - 0.1(1.36, 1.92) = (1.504, 2.408)$.

10. Låt oss börja med att skissa intervallet $I = [0, 1.5]$ fördelat i tre delar, alltså $h = 0.5$.



I bilden (i, y_i), där $y_i = y(i)$, är koordinater av de punkterna som vi har i approximationen (komma ihåg att vi känner redan $y_0 = 0$ och $y_{1.5} = 2$).
Vi kommer att använda centraldifferens formler för y' och y'' :

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

I de två inre punkterna har vi följande ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 - 2y_{0.5} + y_0}{0.25} + 2\dfrac{y_1 - y_0}{1} = 0.5 \\ \dfrac{y_{1.5} - 2y_1 + y_{0.5}}{0.25} + 2\dfrac{y_{1.5} - y_{0.5}}{1} = 1. \end{cases}$$

Vi stoppar in värdena $y_0 = 0$ och $y_{1.5} = 2$ och har:

$$\begin{cases} 4y_1 - 8y_{0.5} + 0 + 2y_1 - 0 = 0.5 \\ 8 - 8y_1 + 4y_{0.5} + 4 - 2y_{0.5} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 6y_1 - 8y_{0.5} = 0.5 \\ -8y_1 + 2y_{0.5} = -11 \end{cases} \quad \cdots$$

Lösningen blir

$$\begin{cases} y_{0.5} = \frac{31}{26} \approx 1.67 \\ y_1 = \frac{87}{52} \approx 1.19. \end{cases}$$