HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Bertil Nilsson, 035-167210
Pererik Andreasson, 035-167668
Mikael Hindgren, 035-167220

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Fredagen den 15 januari 2021
Skrivtid: 9.00-14.00

Hjälpmedel: *Miniräknare. Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt angivet svar. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Visa att ekvationen $\ln(1+x) = 1 - x$ har exakt en rot x^* i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*
   (b) Använd Newton-Raphsons metod med startvärdet $x_0 = 0.5$ för att bestämma approximationen x_2 till x^* genom att göra två iterationer "för hand". *(1p)*
   (c) Skriv ett program som utnyttjar sekantmetoden för att bestämma ett närmevärde till x^* med ett fel som är mindre än 10^{-6}. *(1p)*

2. Utnyttja mätserien

x	0	1	2
y	1	2	4

för att

   (a) bestämma en linjär splinefunktion som interpolerar mätvärdena. *(2p)*
   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

3. Beräkna ett approximativ värde på integralen

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx$$

med Simpsons formel för $n = 4$ och visa att närmevärdet har 3 korrekta decimaler.
För Simpsons formel är resttermen $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$. *(3p)*

4. Använd Jacobis iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.5, 0)$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}^{(2)}$ till ekvationssystemet *(3p)*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 &= 0. \end{cases}$$

5. Bestäm det egenvärde som har störst absolutbelopp och motsvarande egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

med hjälp av potensmetoden med två iterationer och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (0, 1)$. *(3p)*

6. Betrakta $\min(x^4 - x^2 - x)$. Använd Newtons metod, starta i $x = 1$ och gör två iterationer. *(2p)*

7. Sök extrempunkt till $\begin{cases} \min(x_1^2 + x_2) \\ \text{då } \ 2x_1 = x_2 \end{cases}$ genom att använda Lagrangeformulering. *(3p)*

8. Sök extrempunkt till $\begin{cases} \min(x^3 + 2x) \\ \text{då } \ x \geq 2 \end{cases}$ genom att använda inre straffmetod. *(3p)*

9. Studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + xy(x) + x & \text{(ODE)}, \\ y(1) = 2 & \text{(BV)}. \end{cases}$$

Använd implicit Euler och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

10. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) - 2y(x) = x^2, \\ y(0) = 0,\ y(3) = 1, \end{cases}$$

i intervallet $[0, 3]$ med hjälp av finita differensmetoden. Dela in intervallet i tre bitar (d.v.s. använd två obekanta). *(4p)*

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Bertil Nilsson, 035-167210
Pererik Andreasson, 035-167668
Mikael Hindgren, 035-167220

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Onsdagen den 15 januari 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

Lösningsförslag

1. (a) Med $f(x) = \ln(1+x) + x - 1$ kan ekvationen skrivas som $f(x) = 0$. För $x \in I = [0, 1]$ har vi:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + 1 \geq \frac{1}{1+1} + 1 = \frac{3}{2} > 0$$

dvs $f(x)$ är strängt växande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = -1 < 0$ och $f(1) = \ln 2 > 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe x^* i I.

(b) Iterationsformeln för Newton-Raphsons metod:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) = \frac{1 + 2x_k - (x_k+1)\ln(1+x_k)}{x_k + 2} = g(x_k)$$

med $x_0 = 0.5$ som startvärde ger efter 2 iterationer:

$$x_1 = g(x_0) = 0.5567209...$$
$$x_2 = g(x_1) = 0.5571455...$$

Mathematicas `NSolve`: 0.557146.

(c) Iterationsformeln för Sekantmetoden:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Följande program i Mathematica ger en approximation för roten till $\ln(1+x) = 1 - x$ med ett fel som är mindre än $\epsilon = 10^{-6}$:

```
Remove["Global`*"]
f[x_] := Log[1 + x] + x - 1;
epsilon = 10. ^ (-6);
diff = 1;
xold = 0.4;
xolder = 0.5;
While[diff > epsilon,
 xnew = xold - f[xold] * (xold - xolder) / (f[xold] - f[xolder]);
 diff = Abs[xnew - xold];
 Print[{xnew, diff}];
 xolder = xold;
 xold = xnew;
]
```

2. (a) Ansats:

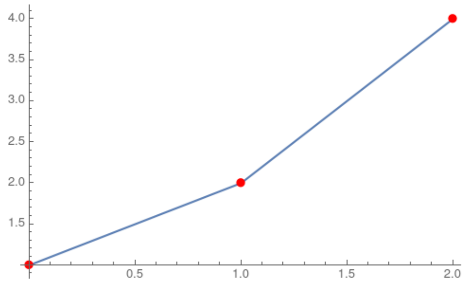
$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = c_0 + c_1(x-0), & 0 \leq x < 1 \\ s_2(x) = d_0 + d_1(x-1), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Kontinuitets- och ändpunktsvillkoren på $s(x)$ ger nu

$$\begin{cases} s(0) = s_1(0) = c_0 = f(0) = 1 \\ s(1) = s_1(1) = c_0 + c_1 = s_2(1) = d_0 = f(1) = 2 \\ s(2) = s_2(2) = d_0 + d_1 = f(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (c_0, c_1, d_0, d_1) = (1, 1, 2, 2)$$

dvs

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



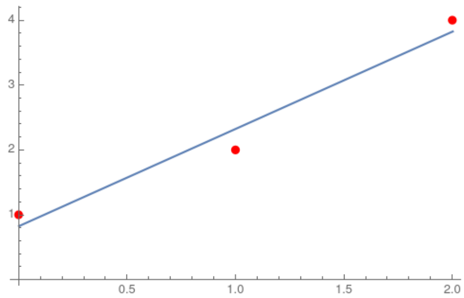
(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \binom{k}{m}$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dvs $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{6}$.



3. Med Simpsons formeln för $n = 4$ får vi:

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b))$$
$$= \frac{1}{12}(e^0 + 4e^{-0.5} + 2e^{-1} + 4e^{-1.5} + e^{-2}) = 0.4324781...$$

Felet ges av $R_n = -\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^4(\xi)$ där $a = 0 \leq \xi \leq b = 1$. Eftersom $D^4(e^{-2x}) = 16e^{-2x}$ får vi

$$|R_4| = \left|\frac{1}{180 \cdot 4^4} 16e^{-2\xi}\right| \leq \frac{16}{180 \cdot 4^4} = 0.0003472221... < 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

$$\therefore \int_0^1 e^{-2x}\,dx = 0.432 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$$

dvs vi har 3 korrekta decimaler.
Anm: Integralens exakta värde är $\frac{1}{2}(1 - e^{-2}) = 0.4323323584...$

4. Jacobis iterationsmetod:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L+U)\boldsymbol{x}^{(k)})$$

där koefficientmatrisen A är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med L strikt undertriangulär, D diagonal och U strikt övertriangulär. Vi har alltså

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad L + U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Med startvektorn $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1/2, 0)$ får vi

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5/12 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

dvs $(x_1, x_2) = (0.416667, -0.166667)$.
Mathematicas `NSolve`: $(x_1, x_2) = (0.428571, -0.142857)$

5. Om λ_1 är det egenvärde till A som har störst absolutbelopp ger två iterationer med potensmetoden:

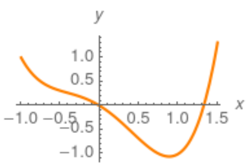
$$\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = (0.242536, 0.970143)$$
$$\lambda_1^{(1)} = \boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{y}_1 = (0,1)\cdot(1,4) = 4$$
$$\boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.242536 \\ 0.970143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.45521 \\ 4.12311 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|} = (0.33282, 0.94299),$$
$$\lambda_1^{(2)} = \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{y}_2 = (0.242536, 0.970143)\cdot(1.45521, 4.12311) = 4.35294.$$

Mathematicas `EigenSystem`: $\lambda_1 = 4.41421$ med motsvarande normerade egenvektor $(0.382683, 0.92388)$.

6. * Betrakta $\min(x^4 - x^2 - x)$. Använd Newtons metod, starta i $x = 1$ och gör två iterationer. (2p)

Lösningsförslag: Först en plot.

```
f[x_] := x^4 - x^2 - x
Plot[f[x], {x, -1, 1.5}, PlotStyle → Orange, PlotRange → All, AxesLabel → {x, y}]
```



Sedan lite derivatagodis.

```
{f'[x], f''[x], f'[x]/f''[x]} // Simplify
```

$$\left\{4x^3 - 2x - 1,\ 12x^2 - 2,\ \frac{-4x^3 + 2x + 1}{2 - 12x^2}\right\}$$

Nu är det äntligen dax för två iterationer med Newtons metod, sid 51, kap 9.2.4. Börja i $x = 1$.

```
{x, f[x]} /. x → NestList[# - f'[#]/f''[#] &, 1.0, 2]
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.9 & 0.884974 \\ -1. & -1.0539 & -1.05478 \end{pmatrix}$$

Utom tävlan.

```
NMinimize[f[x], x]
```

$\{-1.05478, \{x \to 0.884646\}\}$

7. * Sök extrempunkt till $\begin{cases} \min(x_1^2 + x_2) \\ \text{då } 2x_1 = x_2 \end{cases}$ genom att använda Lagrangeformulering. (3p)

Lösningsförslag: Först Lagrangefunktionen, sid 55, kap 10.2.1, $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

```
f = x1^2 + x2; g = 2 x1 - x2; L = f + λ g
```

$\lambda (2 x_1 - x_2) + x_1^2 + x_2$

Sedan $\nabla_{x,\lambda} L(x, \lambda) = 0$.

```
ekv = D[L, {{x1, x2, λ}}] == 0
```

$\{2 \lambda + 2 x_1, 1 - \lambda, 2 x_1 - x_2\} = 0$

Linjärt ekvationssystem, löses lätt för hand. Slutligen extrempunkt och extremvärde.

```
Solve[ekv]
f /. %
```

$\{\{\lambda \to 1, x_1 \to -1, x_2 \to -2\}\}$

$\{-1\}$

Utom tävlan.

```
Minimize[{f, g == 0}, {x1, x2}]
```

$\{-1, \{x_1 \to -1, x_2 \to -2\}\}$

8. * Sök extrempunkt till $\begin{cases} \min(x^3 + 2x) \\ \text{då } x \geqslant 2 \end{cases}$ genom att använda inre straffmetod. (3p)

Lösningsförslag: Först inre straffunktion vid olikhetsbivillkor, sid 60, kap 10.2.3. Välj exempelvis

```
P = x^3 + 2 x - r (2 - x)^-1   (* r*Log[-(2-x)] går lika bra, nästan bättre… *)
```

$-\frac{r}{2 - x} + x^3 + 2 x$

Sedan stationär punkt $\nabla_x P = 0$.

```
dP = D[P, x] == 0
```

$-\frac{r}{(2 - x)^2} + 3 x^2 + 2 = 0$

Lös ut $r(x)$, sedan är det bara att (odramatiskt) gå i gräns $r \to 0$ och lösa ut x.

```
rAvx = Solve[dP, r]
```

$\{\{r \to (x - 2)^2 (3 x^2 + 2)\}\}$

```
Solve[r == 0 /. rAvx, x, Reals]
```

$\{\{x \to 2\}, \{x \to 2\}\}$

Ok, slutligen utom tävlan.

```
Minimize[{x^3 + 2 x, x >= 2}, x]
```

$\{12, \{x \to 2\}\}$

9. * Studera (BVP) $\begin{cases} y'(x) = 1 + x\,y(x) + x & \text{(ODE)} \\ y(1) = 2 & \text{(BV)} \end{cases}$. Använd implicit Euler och ta ett steg med $h = 0.1$. (2p)

Lösningsförslag: Implicit Eulers metod, sid 72, kap 11.4, $y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Vi får

```
h = 0.1; x0 = 1; y0 = 2; x1 = x0 + h;
```

```
y1 == y0 + h (1 + x1 y1 + x1)
Solve[%]
```

$y_1 = 0.1\,(1.1\,y_1 + 2.1) + 2$

$\{\{y_1 \to 2.48315\}\}$

Jfr med *Mathematica*

```
DSolve[{y'[x] == 1 + x y[x] + x, y[1] == 2}, y[x], {x, 1, 2}]
% /. x → x1
```

$$\left\{\left\{y(x) \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{\frac{x^2}{2}} + 3\, e^{\frac{1}{2}(x^2-1)} - 1\right\}\right\}$$

$\{\{y(1.1) \to 2.43766\}\}$

10. Finita differensapproximationen till differentialekvationen blir:

$$\frac{y_{i+1} - 2(1 + h^2)y_i + y_{i-1}}{h^2} = x_i^2$$

vilket i intervallet $[0, 3]$ för $n = 3$ (dvs $h = 1$, $i = 1, 2$), $y_0 = y(0) = 0$ och $y_3 = y(3) = 1$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} -4y_1 & + & y_2 & = & 1 \\ y_1 & - & 4y_2 & = & 3 \end{cases}$$

som har lösningen $y_1 = y(1) = -0.466667$ och $y_2 = y(2) = -0.866667$.
Korrekta funktionsvärden med Mathematicas DSolve (blå kurvan):
$y(1) = -0.545099$, $y(2) = -1.01828$.