**HÖGSKOLAN I HALMSTAD**
**Akademin för informationsteknologi**
Bertil Nilsson, 035-167210
Pererik Andreasson, 035-167668
Mikael Hindgren, 035-167220

**Tentamensskrivning**
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Tisdagen den 15 januari 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

***Hjälpmedel:*** *Miniräknare. Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Utnyttja mätserien

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1 | 4 |

för att

   (a) bestämma Newtons interpolationspolynom av grad 2. *(2p)*
   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

2. (a) Visa att ekvationen $e^{x^2} = 6x - 1$ har exakt en rot $x^*$ i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*
   (b) Bestäm en funktion $g(x)$ sådan att fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ konvergerar mot roten $x^*$ i (a) om $x_0$ väljs i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*
   (c) Skriv ett program som utnyttjar fixpunktsiterationen i (b) och beräknar ett närmevärde till roten $x^*$ i (a) med ett fel som är mindre än $10^{-6}$. *(1p)*

3. Beräkna ett approximativ värde på integralen

$$\int_0^1 xe^x \, dx$$

med Simpsons formel för $n = 4$ och visa att närmevärdet har 3 korrekta decimaler.
För Simpsons formel är resttermen $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$. *(3p)*

4. Bestäm det egenvärde som har minst absolutbelopp och motsvarande egenvektor till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

med hjälp av potensmetoden med två iterationer och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1)$. *(3p)*

5. Använd Jacobis iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0)$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}_2$ till ekvationssystemet *(3p)*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &= 2. \end{cases}$$

6. Betrakta min $e^x - 2x$. Använd Newtons metod, starta i $x = 0$ och gör två iterationer. *(2p)*

7. Sök extrempunkt till $\begin{cases} \text{min } x_1^2 + x_2^2 + x_2 \\ \text{då } 2x_1 = -x_2 \end{cases}$ genom att använda Lagrangeformulering. *(3p)*

8. Sök extrempunkt till $\begin{cases} \text{min } x^2 + 2x \\ \text{då } x \geq 3 \end{cases}$ genom att använda inre straffmetod. *(3p)*

9. Studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y(x) - x \quad \text{(ODE)}, \\ y(1) = 2 \quad \text{(BV)}. \end{cases}$$

Använd implicit Euler och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

10. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) = x^2, \\ y(0) = 1, \, y(0.75) = 2, \end{cases}$$

i intervallet $[0, 0.75]$ med hjälp av finita differensmetoden. Dela in intervallet i tre bitar (d.v.s. använd två obekanta). *(4p)*

*Lycka till!*

**HÖGSKOLAN I HALMSTAD**
**Akademin för informationsteknologi**
Bertil Nilsson, 035-167210
Pererik Andreasson, 035-167668
Mikael Hindgren, 035-167220

**Tentamensskrivning**
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Onsdagen den 15 januari 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

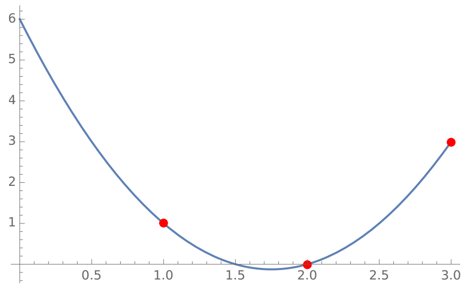
# Lösningsförslag

1. (a) Vi bestämmer Newtons interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av mätserien:

$$\text{Ansats:}\quad p_2(x) = c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2(0) = c_0 = 1 \\ p_2(1) = c_0 + c_1 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 0 \\ p_2(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 4 \Leftrightarrow c_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\quad p_2(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-0)(x-1) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1.$$




(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix}\right)$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

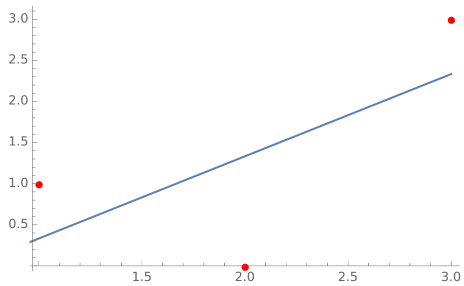
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs $y = \dfrac{3x+1}{2}$.




2. (a) Med $f(x) = e^{x^2} - 6x + 1$ får vi för $x \in I = [0,1]$:

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 6 \leq 2 \cdot 1 \cdot e^1 - 6 < 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

dvs $f(x)$ är strängt avtagande i $I$. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = 2 > 0$ och $f(1) = e^1 - 6 < 3 - 6 < 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe i $I$.

(b) Med $g(x) = \dfrac{e^{x^2}+1}{6}$ kan ekvationen skrivas som $x = g(x)$. Fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ konvergerar mot den sökta roten $x^*$ om $|g'(x)| < 1$ i en omgivning av $x^*$ som innehåller $x_0$. För $x \in [0,1]$ har vi:

$$|g'(x)| = \frac{xe^{x^2}}{3} \leq \frac{e}{3} < 1.$$

Väljer vi t.ex. $x_0 = 0.5$ kommer därför fixpunktsiterationen att konvergera mot $x^*$.

(c) Följande program i Mathematica ger en approximation för roten till $e^{x^2} = 6x - 1$ med ett fel som är mindre än $\epsilon = 10^{-6}$:

```
Remove["Global`*"]
g[x_] := (Exp[x^2] + 1) / 6;
epsilon = 10^(-6);
diff = 1;
xold = 0.5;
While[diff > epsilon,
  xnew = g[xold];
  diff = Abs[xnew - xold];
  xold = xnew;
 ];
Print["Sökta roten: ", xnew]
```

3. Med Simpsons formeln för $n = 4$ får vi:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &\approx \frac{b-a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b)) \\ &= \frac{1}{12}(0\cdot e^0 + 4\cdot 0.25\cdot e^{0.25} + 2\cdot 0.5\cdot e^{0.5} + 4\cdot 0.75\cdot e^{0.75} + e^1) = 1.000169047...\end{aligned}$$

Felet ges av $R_n = -\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^4(\xi)$ där $a \leq \xi \leq b$. Eftersom $D^4(xe^x) = e^x(x+4)$ får vi

$$|R_4| = \left|\frac{1}{180\cdot 4^4} e^{\xi}(\xi+4)\right| \leq \left|\frac{1}{180\cdot 4^4} e^1(1+4)\right| < \frac{1}{180\cdot 4^4}\cdot 3\cdot 5 = 0.0003255... < 0.5\cdot 10^{-3}.$$

$$\therefore \int_0^1 xe^x\,dx = 1.000 \pm 0.5\cdot 10^{-3}$$

dvs vi har 3 korrekta decimaler.
*Anm:* Integralens exakta värde är 1.

4. Om $A$ är inverterbar har vi

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

Detta betyder att $A$ och $A^{-1}$ har samma egenvektorer och söker vi det egenvärde $\lambda$ till $A$ som har minst absolutbelopp kan vi istället beräkna det egenvärde till $A^{-1}$ som har störst absolutbelopp. Vi har:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Om nu $\lambda_1$ är det egenvärde till $A^{-1}$ som har störst absolutbelopp ger två iterationer med potensmetoden:

$$\boldsymbol{y}_1 = A^{-1}\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = \tfrac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)$$

$$\lambda_1^{(1)} = \boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix} = -5$$

$$\boldsymbol{y}_2 = A^{-1}\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}5\\ -7\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|} = \tfrac{1}{\sqrt{74}}(5,-7),$$

$$\lambda_1^{(2)} = \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}5\\ -7\end{pmatrix} = -\frac{31}{13}.$$

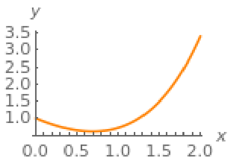
$\lambda \approx 1/\lambda_1^{(2)} = -\frac{13}{31} = -0.419355$ är alltså det egenvärde till $A$ som har minst absolutbelopp och den motsvarande normerade egenvektorn $\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{74}}(5,-7) = (0.581238, -0.813733)$.

5. Jacobis iterationsmetod:
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L+U)\boldsymbol{x}^{(k)})$$
där koefficientmatrisen $A$ är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med $L$ strikt undertriangulär, $D$ diagonal och $U$ strikt övertriangulär. Vi har alltså
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Med startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0)$ får vi
$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

6. Betrakta min $e^x - 2x$. Använd Newtons metod, starta i $x = 0$ och gör två iterationer. (2p)

**Lösningsförslag:** Först en plot.

```
f[x_] := e^x - 2 x
Plot[f[x], {x, 0, 2}, PlotStyle → Orange, PlotRange → All, AxesLabel → {x, y}]
```




Sedan lite derivatagodis.

```
{f'[x], f''[x], f'[x]/f''[x]} // Simplify
```

$\{-2 + e^x, e^x, 1 - 2 e^{-x}\}$

Nu är det äntligen dax för två iterationer med Newton. Börja i $x = 0$.

```
NestList[# - f'[#]/f''[#] &, 0.0, 2]
```

{0., 1., 0.735759}

Utom tävlan.

```
NMinimize[f[x], x]
```

{0.613706, {x → 0.693147}}

7. Sök extrempunkt till $\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 + x_2 \\ \text{då } 2x_1 = -x_2 \end{cases}$ genom att använda Lagrangeformulering. (3p)

**Lösningsförslag:** Först Lagrangefunktionen $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

```
f = x1^2 + x2^2 + x2; g = 2 x1 + x2; L = f + λ g
x1^2 + x2 + x2^2 + λ (2 x1 + x2)
```

Sedan $\nabla_{x,\lambda} L(x, \lambda) = 0$.

```
ekv = D[L, {{x1, x2, λ}}] == 0
{2 λ + 2 x1, 1 + λ + 2 x2, 2 x1 + x2} == 0
```

Linjärt ekvationssystem, löses lätt för hand. Slutligen extrempunkt och extremvärde.

```
Solve[ekv]
f /. %
```

$\left\{\left\{\lambda \to -\frac{1}{5},\ x_1 \to \frac{1}{5},\ x_2 \to -\frac{2}{5}\right\}\right\}$

$\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

Utom tävlan.

```
Minimize[{f, g == 0}, {x1, x2}]
```

$\left\{-\frac{1}{5},\ \left\{x_1 \to \frac{1}{5},\ x_2 \to -\frac{2}{5}\right\}\right\}$

8. Sök extrempunkt till $\begin{cases} \min x^2 + 2x \\ \text{då } x \geqslant 3 \end{cases}$ genom att använda inre straffmetod. (3p)

**Lösningsförslag:** Först inre straffunktion vid olikhetsbivillkor. Välj exempelvis

```
In[∘]:= P = x^2 + 2 x - r (3 - x)^-1  (* r*Log[-(3-x)] går lika bra, nästan bättre... *)
```

Out[∘]= $-\frac{r}{3-x} + 2x + x^2$

Sedan stationär punkt $\nabla_x P = 0$.

```
In[∘]:= dP = D[P, x] == 0
```

Out[∘]= $2 - \frac{r}{(3-x)^2} + 2x == 0$

Lös ut $r(x)$, sedan är det bara att (odramatiskt) gå i gräns $r \to 0$ och lösa ut $x$.

```
In[∘]:= rAvx = Solve[dP, r]
Out[∘]= {{r → 2 (-3 + x)^2 (1 + x)}}

In[∘]:= Solve[r == 0 /. rAvx]
Out[∘]= {{x → -1}, {x → 3}, {x → 3}}
```

Enligt bivillkoren duger bara $x = 3$. Slutligen utom tävlan.

```
In[∘]:= Minimize[{x^2 + 2 x, x ≥ 3}, x]
Out[∘]= {15, {x → 3}}
```

9. Studera (BVP) $\begin{cases} y'(x) = 1 + y(x) - x & \text{(ODE)} \\ y(1) = 2 & \text{(BV)} \end{cases}$. Använd implicit Euler och ta ett steg med $h = 0.1$. (2p)

**Lösningsförslag:** Implicit Euler $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Vi får

```
h = 0.1; x0 = 1; y0 = 2; x1 = x0 + h;
```

```
y1 == y0 + h (1 + y1 - x1)
Solve[%]
```

```
y1 == 2 + 0.1 (-0.1 + y1)
```

```
{{y1 → 2.21111}}
```

Jfr med *Mathematica*

```
DSolve[{y'[x] == 1 + y[x] - x, y[1] == 2}, y[x], x] // Simplify
% /. x → x1
```

$\{\{y[x] \to e^{-1+x} + x\}\}$

```
{{y[1.1] → 2.20517}}
```

10. Systemet blir

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & -0.992188 \\ 1 & -4 & -5.96875 \end{array}\right)$$

med lösningen $y(0.25) = 1.68269$ och $y(0.5) = 1.91286$.
Korrekta funktionsvärden med Mathematicas DSolve: $y(0.25) = 1.65486$ och $y(0.5) = 1.89906$.