HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Bertil Nilsson, 035-167210
Pererik Andreasson, 035-167668
Mikael Hindgren, 035-167220

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Onsdagen den 16 januari 2019
Skrivtid: 9.00-14.00

Hjälpmedel: *Miniräknare. Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Beräkna ett approximativ värde på integralen
$$\int_0^1 e^x \, dx$$
med trapetsformeln för $n = 5$ och visa att felet ($R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$) i approximationen är mindre än 10^{-2}. *(3p)*

2. Utnyttja mätserien

x	1	2	3
y	1	0	3

för att

   (a) bestämma Newtons interpolationspolynom av grad 2. *(2p)*

   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

3. Visa att ekvationen $e^{-x} = 2x$ har exakt en rot i intervallet $[0, 1]$ och skriv ett program som utnyttjar intervallhalveringsmetoden för att bestämma ett närmevärde till denna rot med ett fel som är mindre än 10^{-6}. *(3p)*

4. Använd Jacobis iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0)$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}_2$ till ekvationssystemet *(3p)*
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 &= 1 \end{cases}$$

5. Bestäm största egenvärde och motsvarande egenvektor till
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
med hjälp av potensmetoden med två iterationer och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0)$. *(3p)*

6. Betrakta min $f(x) = e^{-x} + 2x$. Skriv ett program som utnyttjar Bolzanos metod, startar med intervallet $[-2, 2]$ och håller på tills dess att minpunkten är bestämd med ett fel som är mindre än 10^{-5}. *(3p)*

7. Sök extrempunkt till $\begin{cases} \min\ \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) \\ \text{då } x_1 = 1 \end{cases}$ genom att använda straffmetod. *(3p)*

8. Bestäm största värdet av funktionen $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 2$ genom att använda Lagrangeformulering. *(2p)*

9. Studera begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{cases} y'(x) = 1 - 3xy(x) \quad \text{(ODE)}, \\ y(1) = 2 \quad \text{(BV)}. \end{cases}$$
Använd implicit mittpunktsmetod och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

10. Lös randvärdesproblemet
$$\begin{cases} y''(x) = 6x,\ 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0,\ y(1) = 1, \end{cases}$$
med finita differensmetoden. Dela upp intervallet i tre bitar. Lös även problemet analytiskt och jämför dina lösningar i de två punkter du räknade ut med finita differensmetoden. *(4p)*

Lycka till!

Lösningsförslag

1. Med Trapetsformeln för $n = 5$ får vi:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x\,dx &\approx \frac{b-a}{2n}\big(f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+f(b)\big)\\ &= \frac{1}{10}(e^0+2e^{0.2}+2e^{0.4}+2e^{0.6}+2e^{0.8}+e^1)\\ &= 1.7240056...\end{aligned}$$

Felet ges av $R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$ där $a \le \xi \le b$ och vi får

$$|R_5| = \left|\frac{1}{12\cdot 5^2}e^{\xi}\right| \le \left|\frac{1}{12\cdot 5^2}e^{1}\right| < \frac{1}{12\cdot 5^2}\cdot 3 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

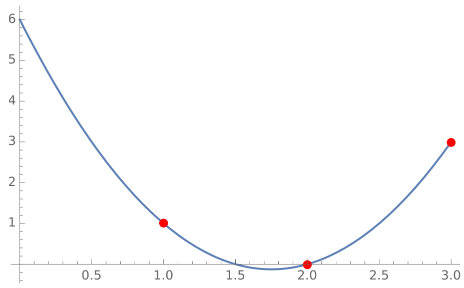
$$\therefore \int_0^1 e^x\,dx = 1.72 \pm 0.01 \qquad \text{(Anm: Exakt värde på integralen är } e-1 = 1.7182818...\text{)}$$

2. (a) Vi bestämmer Newtons interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av mätserien:

$$\text{Ansats:}\quad p_2(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2(1) = c_0 = 1\\ p_2(2) = c_0 + c_1(2-1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = -1\\ p_2(3) = c_0 + c_1(3-1) + c_2(3-1)(3-2) = 3 \Leftrightarrow c_2 = 2\end{cases}$$

$$\therefore\quad p_2(x) = 1-(x-1)+2(x-1)(x-2). = 2x^2-7x+6$$



(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \binom{k}{m}$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^TA\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

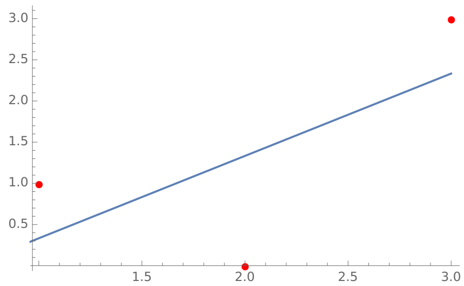
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \quad\text{och}\quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^TA\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\ m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}k\\ m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

dvs $y = x - \frac{2}{3}$.



3. Med $f(x) = e^{-x} - 2x$ får vi $f'(x) = -e^{-x} - 2 < 0$ i $I = [0, 1]$ dvs $f(x)$ är strängt avtagande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = 1 > 0$ och $f(1) = e^{-1} - 2 < \frac{1}{2} - 2 < 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe i I.

   Följande program i Mathematica ger en approximation för roten till $e^{-x} = 2x$ med ett fel som är mindre än $\epsilon = 10^{-6}$:

```
f[x_] := Exp[-x] - 2 x;
{a, b} = {0, 1};
epsilon = 10 ^ (-6);
While[b - a > epsilon,
 c = 0.5 * (a + b);
 Print[{a, c, b}];
 If[f[a] * f[c] < 0, b = c, a = c]
]
```

4. Jacobis iterationsmetod:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L + U)\boldsymbol{x}^{(k)})$$

   där koefficientmatrisen A är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med L strikt undertriangulär, D diagonal och U strikt övertriangulär. Vi har alltså

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Med startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0)$ får vi

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

5. Om λ_1 är det egenvärde till A som har störst absolutbelopp ger två iterationer med potensmetoden:

$$\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\lambda_1^{(1)} = \boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{y}_1 = (1, 0) \cdot (1, -1) = 1$$

$$\boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),$$

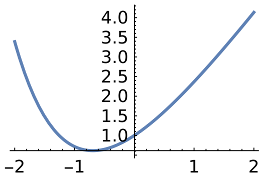
$$\lambda_1^{(2)} = \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{y}_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2.$$

Tentamen i Tekniska beräkningar, 2019-01-16
Kortfattade lösningar till några av uppgifterna

6. Bolzanos metod

```
f[x_] := e^-x + 2 x
```

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}]
```




```
ε = 10^-5; a = -2; b = 2;
While[b - a > ε,
 c = 0.5 (a + b);
 Print[{a, c, b}];
 If[f'[c] > 0, b = c, a = c];
]
```

{−2, 0., 2}

{−2, −1., 0.}

{−1., −0.5, 0.}

{−1., −0.75, −0.5}

{−0.75, −0.625, −0.5}

{−0.75, −0.6875, −0.625}

{−0.75, −0.71875, −0.6875}

{−0.71875, −0.703125, −0.6875}

{−0.703125, −0.695313, −0.6875}

{−0.695313, −0.691406, −0.6875}

{−0.695313, −0.693359, −0.691406}

{−0.693359, −0.692383, −0.691406}

{−0.693359, −0.692871, −0.692383}

{−0.693359, −0.693115, −0.692871}

{−0.693359, −0.693237, −0.693115}

{−0.693237, −0.693176, −0.693115}

{−0.693176, −0.693146, −0.693115}

{−0.693176, −0.693161, −0.693146}

{−0.693161, −0.693153, −0.693146}

```
Minimize[f[x], x]
% // N
```

$\{2(1-\log(2)), \{x \to -\log(2)\}\}$

$\{0.613706, \{x \to -0.693147\}\}$

7. Straffmetod för likhetsbivillkor

$$P = \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \frac{1}{r}(x_1 - 1)^2$$

$$\frac{(x_1-1)^2}{r} + \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

$$\texttt{D[P, \{\{x}_1\texttt{, x}_2\texttt{\}\}]}$$
$$\texttt{Solve[\% == 0, \{x}_1\texttt{, x}_2\texttt{\}]}$$
$$\texttt{\% /. r} \to \texttt{0}$$

$$\left\{\frac{2(x_1-1)}{r} - x_1, x_2\right\}$$

$$\left\{\left\{x_1 \to -\frac{2}{r-2}, x_2 \to 0\right\}\right\}$$

$\{\{x_1 \to 1, x_2 \to 0\}\}$

$$\texttt{Minimize}\left[\left\{\frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right), x_1 == 1\right\}, \{x_1, x_2\}\right]$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, \{x_1 \to 1, x_2 \to 0\}\right\}$$

8. Lagrangeformulering för likhetsbivillkor

$$L = x_1 - x_2 + \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right)$$

$$\lambda\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) + x_1 - x_2$$

$$\texttt{D[L, \{\{x}_1\texttt{, x}_2\texttt{, }\lambda\texttt{\}\}] == 0}$$
$$\texttt{Solve[\%]}$$
$$x_1 - x_2 \texttt{ /. \%}$$

$$\left\{2\lambda x_1 + 1, 2\lambda x_2 - 1, x_1^2 + x_2^2 - 2\right\} = 0$$

$$\left\{\left\{\lambda \to \frac{1}{2}, x_1 \to -1, x_2 \to 1\right\}, \left\{\lambda \to -\frac{1}{2}, x_1 \to 1, x_2 \to -1\right\}\right\}$$

$\{-2, 2\}$

9. (BVP) och implicit mittpunktsmetod

```
y₁ == y₀ + h (1 - 3 (x₀ + x₁)/2 (y₀ + y₁)/2)
% //. {x₀ → 1, y₀ → 2, h → 0.1, x₁ → x₀ + h}
Solve[%]
```

$$y_1 = h\left(1 - \frac{3}{4}(x_0 + x_1)(y_0 + y_1)\right) + y_0$$

$$y_1 = 0.1\,(1 - 1.575\,(y_1 + 2)) + 2$$

$$\{\{y_1 \to 1.54212\}\}$$

```
DSolve[{y'[x] == 1 - 3 x y[x], y[1] == 2}, y[x], x]
% //. {x → x₀ + h, x₀ → 1, h → 0.1}
```

$$\left\{\left\{y(x) \to \frac{1}{6} e^{-\frac{3x^2}{2}} \left(\sqrt{6\pi}\ \mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ x\right) - \sqrt{6\pi}\ \mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 12\, e^{3/2}\right)\right\}\right\}$$

$$\{\{y(1.1) \to 1.54515\}\}$$

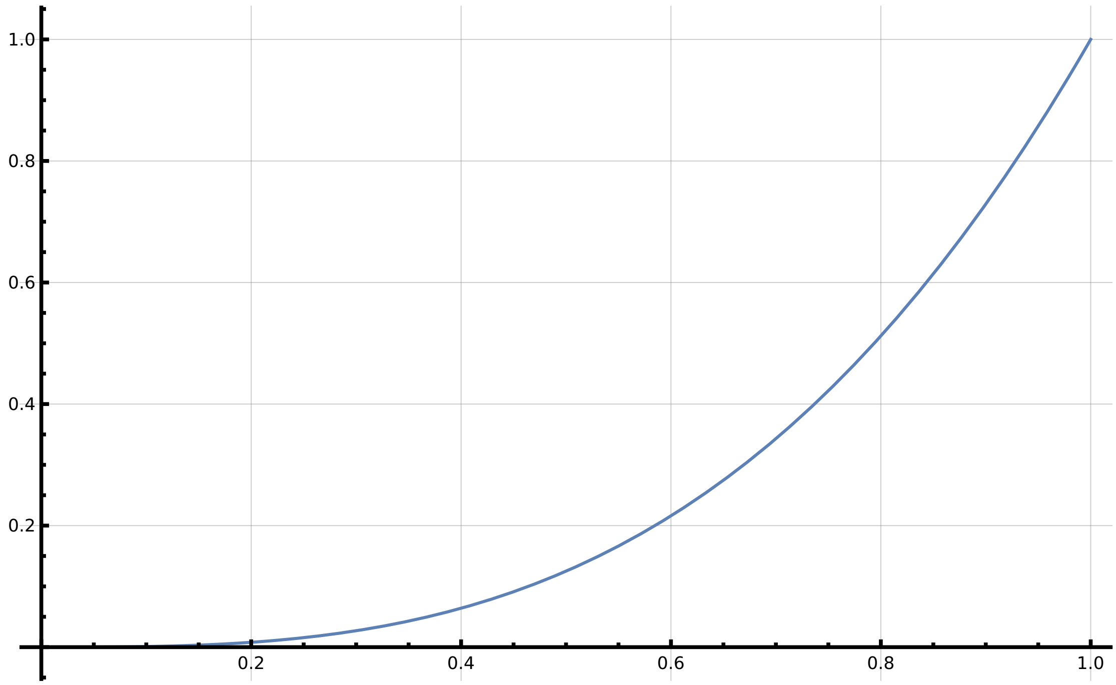
10

Lös randvärdesproblemet y''=6x, på intervallet 0≤x≤1 där y(0)=0 och y(1)=1

Mathematica lösning (exakt, trivial):

```
sol = DSolve[{y''[x] == 6 * x, y[0] == 0, y[1] == 1}, y[x], {x, 0, 1}]
Plot[Evaluate[y[x] /. sol], {x, 0, 1}, PlotRange → All, Axes -> True,
 AxesStyle → Thick, PlotRange → Full, ImageSize → Large, GridLines → Automatic]
```

$\{\{y[x] \to x^3\}\}$



Implementerat med finita differensmetoden:

Diskretiserar andraderivatan och delar in i tre intervall (två obekanta):

$\frac{y(x+1)-2\,y(x)+y(x-1)}{h^2} = 6\,x \to y(x+1) - 2\,y(x) - y(x-1) = h^2\,6\,x$

Från detta får vi två ekvationer att lösa med obekanta i y(1/3) och y(2/3):

$y(2/3) - 2 * y(1/3) + y(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 6 * 1/3$

$y(1) - 2 * y(2/3) + y(1/3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 6 * 2/3$

$$\text{Solve}\left[y_{2/3} - 2 * y_{1/3} + 0 == \left(\frac{1}{3}\right)^2 * 6 * \frac{1}{3} \,\&\&\, 1 - 2 * y_{2/3} + y_{1/3} == \left(\frac{1}{3}\right)^2 * 6 * \frac{2}{3},\ \{y_{1/3}, y_{2/3}\}\right]$$

$$\left\{\left\{y_{\frac{1}{3}} \to \frac{1}{27},\ y_{\frac{2}{3}} \to \frac{8}{27}\right\}\right\}$$

```
% // N
```

$\left\{\left\{y_{\frac{1}{3}} \to 0.037037,\ y_{\frac{2}{3}} \to 0.296296\right\}\right\}$