HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Bertil Nilsson, 035-167210
Pererik Andreasson, 035-167668
Mikael Hindgren, 035-167220

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Tisdagen den 9 januari 2018
Skrivtid: 15.00-20.00

Hjälpmedel: *Miniräknare. Fyll i omslaget fullständigt och skriv namn på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Utnyttja mätserien

x	0	1	2
y	1	3	2

för att

   (a) bestämma Newtons interpolationspolynom av grad 2. *(2p)*

   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

2. Beräkna ett approximativ värde på integralen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

med Simpsons formel för $n = 4$ och visa att felet ($R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$) i approximationen är mindre än 10^{-2}. *(3p)*

3. Visa att ekvationen $\cos x = x$ har exakt en rot i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ och skriv ett program som utnyttjar sekantmetoden för att bestämma ett närmevärde till denna rot med ett fel som är mindre än 10^{-6}. *(3p)*

4. Bestäm L-, R- och P-matriserna till nedanstående matris A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Använd den faktoriserade matrisen för att lösa ekvationssystemet $Ay = b$. *(3p)*

5. Bestäm största egenvärde och tillhörande egenvektor för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gör två iterationer med potensmetoden. *(3p)*

6. Betrakta min $e^{-x} + 2x$. Använd Newtons metod, starta i $x = 0$ och gör tre iterationer. *(2p)*

7. Sök extrempunkt till

   (a) $\begin{cases} \text{min } x_1^2 + 2x_2^2 + x_2 \\ \text{då } x_1 = 2x_2 \end{cases}$ genom att använda Lagrangeformulering. *(2p)*

   (b) $\begin{cases} \text{min } x^2 + x \\ \text{då } x \geq 1 \end{cases}$ genom att använda inre straffmetod. *(2p)*

8. Studera begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = x + 2y(x) \quad \text{(ODE)}, \\ y(0) = 1 \quad \text{(BV)}. \end{cases}$$

   (a) Använd Heuns explicita metod och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

   (b) Använd Eulers implicita metod och ta ett steg med $h = 0.1$. *(2p)*

9. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) = y(x) + x^2, \\ y(0) = 0, \; y(1) = 1, \end{cases}$$

med finita differensmetoden. Dela upp intervallet i tre bitar, d.v.s, använd två obekanta. *(4p)*

Lycka till!

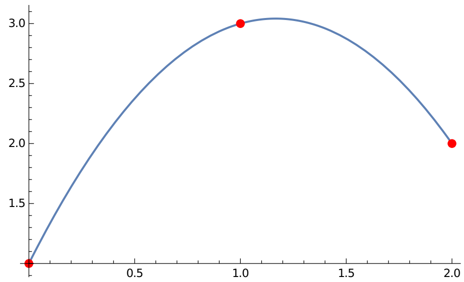
HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Bertil Nilsson, 035-167210
Pererik Andreasson, 035-167668
Mikael Hindgren, 035-167220

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Tisdagen den 9 januari 2018
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Vi bestämmer Newtons interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av mätserien:

$$\text{Ansats:}\quad p_2(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-1)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p_2(0) = c_0 = 1 \\ p_2(1) = c_0 + c_1(1-0) = 3 \Leftrightarrow c_1 = 2 \\ p_2(2) = c_0 + c_1(2-0) + c_2(2-0)(2-1) = 2 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$
$$\therefore\quad p_2(x) = 1 + 2(x-0) - \frac{3}{2}(x-0)(x-1) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2} + 1.$$



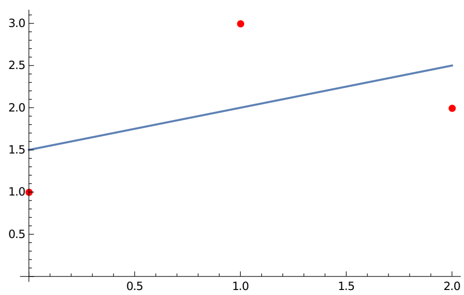
(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \binom{k}{m}$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

dvs $y = 0.5x + 1.5$.



2. Med Simpsons formel för $n = 4$ får vi:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b))$$
$$= \frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos 0 + 4\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{12}\left(0 + 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\cdot 1 + 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\right) = \frac{(1+2\sqrt{2})\pi}{6} = 2.00455975...$$

Felet ges av $R_n = \dfrac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} f^{(4)}(\xi)$ där $a \leq \xi \leq b$ och vi får

$$\left|R_4\right| = \left|\frac{\pi^5}{180 \cdot 4^4} \cos(\xi)\right| \underset{|\cos x| \leq 1}{\leq} \frac{\pi^5}{180 \cdot 4^4} = 0.0066410... \leq 10^{-2}$$

$$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2.00 \pm 0.01 \qquad \text{(Anm: Exakt värde på integralen är 2.)}$$

3. Med $f(x) = x - \cos x$ får vi $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ i $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ dvs $f(x)$ är strängt växande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = -1 < 0$ och $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe i I. Iterationsformeln för Sekantmetoden

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

kräver två startvärden och väljer vi de två punkterna $x_0 = 0.1$ respektive $x_1 = 0.2$ i I ger t ex följande program i Mathematica en approximation för roten till $\cos x = x$ med ett fel som är mindre än $\epsilon = 10^{-6}$:

```
f[x_] := x - Cos[x];
epsilon = 10^(-6);
diff = 1;
xold = 0.2;
xolder = 0.1;
While[diff > epsilon,
 xnew = xold - f[xold] * (xold - xolder) / (f[xold] - f[xolder]);
 diff = Abs[xnew - xold];
 Print[{xnew, diff}];
 xolder = xold;
 xold = xnew;
]
```

4.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.6923 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 6.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1.3846 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5. Med startvektorn $(1, 0)$ blir efter två iterationer egenvärdet 3.4 och motsvarande normerade egenvektor

$$\begin{pmatrix} 0.9363 \\ -0.3511 \end{pmatrix}.$$

9. Finita differensapproximationen till randvärdesproblemet blir:

```
y(i+1)*(1/h^2) - y(i)*(2/h^2+1) + y(i-1)*(1/h^2) = x(i)^2
```

Matrissystemet blir:

$$VL = \begin{pmatrix} -19 & 9 \\ 9 & -19 \end{pmatrix} \quad HL = \begin{pmatrix} 0.1111 \\ -8.5556 \end{pmatrix}$$

De två obekanta blir 0.2675 och 0.5770.