HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Envariabelanalys
Projektuppgift 1.5 hp
1 december 2025

Projektuppgiften löses med hjälp av Mathematica och redovisas såväl muntligt som med en skriftlig rapport i form av en Mathematica notebook. Rapporten ska innehålla en fullständig redogörelse för hur uppgiften lösts. Projektuppgiften bedöms med betyget godkänd eller underkänd. Godkänd projektuppgift ger 1.5 hp.

Stoppa tjuven - bygg ett tjuvlarm!

En kondensators kapacitans beror på dielektricitetskonstanten för materialet i kondensatorn men det elektriska fältet omkring en laddad kondensator polariserar också material som befinner i närheten av kondensatorn. Det innebär att kapacitansen påverkas av objekt som är nära kondensatorn och även om denna effekt är liten (typiskt av storleksordningen några pF) kan den utnyttjas i t.ex. ett enkelt tjuvlarm. Om en tjuvhand eller någon annan del av tjuvens kropp kommer nära den laddade kondensatorn förändras kapacitansen och om denna kapacitansförändring kan registreras har vi ett tjuvlarm där kondensatorn är larmets detektor.

Uppgiften är att konstruera ett tjuvlarm enligt denna princip. För att registrera kapacitansförändringen används en enkel seriekrets. Kondensatorn kopplas i serie med en resistor och en känslig amperemeter till en spänningskälla. Förutom detektorkondensatorn, en likspänningskälla med konstant spänning, en ampéremeter som kan registrera små strömmar finns tillräckligt många resistorer för att kunna skapa i princip vilken resistans som helst.

1. Det första problemet är att detektorkondensatorns märkning är otydlig och därför måste först dess kapacitans bestämmas. Någon har redan på börjat detta arbete vilket resulterat i mätserien som finns i filen `matserie.dat`. Tabellen i filen visar spänningen (V) över kondensatorn som funktion av tiden (s) då den urladdas genom en resistor på 22 GΩ.

   Utnyttja *hela* mätserien och bestäm:

   (a) Spänningen u_C över kondensatorn och strömmen i genom resistorn vid tiden t. Kontrollera resultatet genom att plotta $u_C(t)$ och mätserien i samma graf.

   (b) Kondensatorns kapacitans C_0.

   (c) Den tid det tar innan kondensatorns laddning minskat till hälften.

   (d) Effektutvecklingen i resistorn vid tiden t.

   (e) Värmeenergin som utvecklas i resistorn under tiden $0 \leq t \leq 0.5$ s samt totala värmeenergin som utvecklats då kondensatorn urladdats helt. Utnyttja resultatet i (d).

   Tips: Mathematica-funktionerna `Import`, `FindFit` och eventuellt `DSolve` kan också vara användbara. För att plotta mätserien och resultatet från `FindFit` i samma plot kan man använda `Plot`, `ListPlot` och `Show`.

2. Spänningskällan som ska använda till larmet lämnar en konstant likspänning på 250 V. Amperemetern har en utgång som kan kopplas till en sirén och denna utgång aktiveras om strömmen $i(t)$ är över $i_{\min} = 1.00\,\mu$A under minst $t_{\min} = 250\,\mu$s. Tjuvlarmet ska konstrueras så att det löser ut om kapacitansen förändras med mer än 10%. Tiden det tar för kapacitansen att förändras då ett objekt kommer i närheten av kondensatorn är i detta sammanhang försumbar.

   (a) Förklara hur seriekretsen kan fungera som ett tjuvlarm.

   (b) Bestäm de värden på serieresistansen som uppfyller specifikationerna ovan. Kontrollera svaren med lämplig graf.
   Tips: Mathematica-funktionerna `DSolve` och `NSolve` kan användas här.

   (c) Förklara vad som händer om man väljer för stor respektive för liten resistans. Motivera svaret med lämpliga grafer.

3. Antag nu att man vill öka känsligheten på larmet.

   (a) Hur små kapacitansförändringar kan man mäta med ovanstående utrustning?

   (b) Vilken spänning krävs om larmet ska kunna detektera kapacitansförändringar ner till 5% ?

   Tips: `FindMaximum` och `NSolve` kan man ha nytta av här.

Några fler tips...

1 a,b) I seriekretsen gäller under urladdningen (se föreläsningen *Differentialekvationer del 1* sid. 6):

$$u_R + u_C = 0 \Leftrightarrow Ri + u_C = 0 \Leftrightarrow i + \frac{u_C}{R} = 0.$$

Eftersom $i(t) = q'(t) = C_0 u'_C(t)$ får vi en differentialekvation för u_C. C_0 kan nu bestämmas genom att lösningen $u_C(t)$ anpassas till mätserien, t.ex. med hjälp av `FindFit` i Mathematica.

2 b) Då tjuvhanden närmar sig kondensatorn ökar kapacitansen från C_0 till $C = 1.1C_0$. En ström kommer då att börja flyta i kretsen. (Varför?) Då gäller följande samband (se föreläsningen *Differentialekvationer del 1* sid. 5):

$$u_R + u_C = E \Leftrightarrow Ri + \frac{q}{C} = E.$$

Vi får här en differentialekvation för q med begynnelsevillkoret $q(0) = C_0 E$. Derivering av lösningen $q(t)$ ger strömmen

$$i(t, R) = \text{konst} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{R}.$$

(Vad är konstantens värde?) Eftersom strömmen måste vara över $i_{\text{min}} = 1.00\ \mu\text{A}$ under minst $t_{\text{min}} = 250\ \mu\text{s}$ kan intervallet för R bestämmas genom att lösa ekvationen $i(t_{\text{min}}, R) = i_{\text{min}}$ med avseende på R. Kontrollera resultatet genom att plotta $i = i(t_{\text{min}}, R)$ och $i = i_{\text{min}}$ i samma graf.

3 a,b) Lös ekvationen $i(t_{\text{min}}, R_{\text{max}}) = i_{\text{min}}$ med avseende på C (a) respektive E (b) där R_{max} motsvarar maxvärdet för $i(t_{\text{min}}, R)$.