MA2001 Envariabelanalys

Något mer om integraler

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

26 november 2025

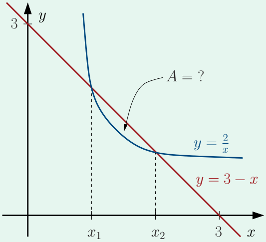
Areaberäkningar

Exempel 1

Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = \frac{2}{x}$ och linjen $y = 3 - x$.

Lösning:

Skärningspunkterna: $$\frac{2}{x} = 3 - x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$$



$$\frac{2}{x} < 3 - x \text{ för } 1 < x < 2 \Rightarrow$$

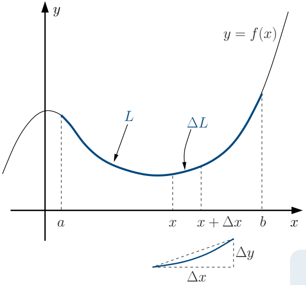
$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln|x|\right]_1^2 \\ &= 6 - 2 - 2\ln 2 - \left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \text{ a.e.} \end{aligned}$$

Exempel 2

Beräkna arean av en ellips med halvaxlarna a och b.

Båglängd

Vi söker längden av en funktionskurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.



$$\Delta L \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$\Rightarrow L \approx \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$\to \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \quad \text{då} \quad \Delta x \to 0$$

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}$$

Exempel 3

Bestäm längden av kurvan $y = f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.

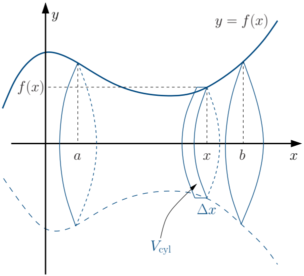
Rotationsvolymer

Rotation kring x-axeln:

$$V_{\text{cyl}} = \pi(f(x))^2\Delta x \Rightarrow V \approx \sum V_{\text{cyl}} = \sum \pi(f(x))^2\Delta x$$

$$\to \pi\int_a^b (f(x))^2 dx \quad \text{då} \quad \Delta x \to 0$$

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

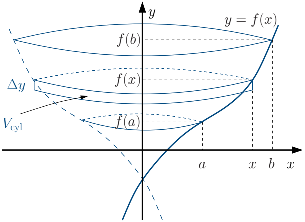


Rotation kring y-axeln:

$$V_{\text{cyl}} = \pi x^2\Delta y \Rightarrow V \approx \sum V_{\text{cyl}} = \sum \pi x^2\Delta y$$

$$\to \pi\int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy \quad \text{då } \Delta y \to 0$$

$$V = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy$$



Rotationsvolymer

Exempel 4

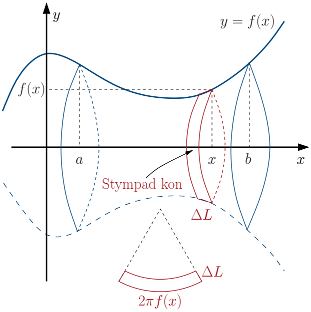
Bestäm volymen av en rotationsellipsoid.

Exempel 5

Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då kurvan $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$ roterar kring y-axeln.

Rotationsytor

Vi söker arean av den kropp som uppkommer då kurvan $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, roterar kring x-axeln:



$$
\begin{aligned}
A_{\text{kon}} &\approx 2\pi f(x)\Delta L = 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x \\
\Rightarrow A &\approx \sum A_{\text{kon}} = \sum 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x \\
&\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \text{ då } \Delta x \to 0
\end{aligned}
$$

Rotation kring x-axeln ($f(x) \geq 0$):

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Anm: $y = f(x)$ roterar kring y-axeln $\Leftrightarrow$ $y = f^{-1}(x)$ roterar kring x-axeln.

Rotationsytor

Exempel 6

Beräkna arean av en sfär med radie r.

Exempel 7

Beräkna volymen och arean av den kropp som uppkommer då kurvan $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, roterar kring x-axeln.

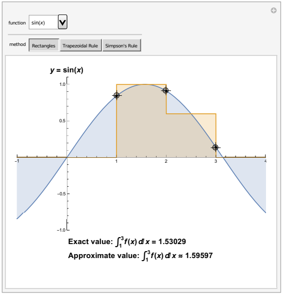
Numerisk integration

Antag att vi vill beräkna ett approximativt värde på integralen $\int_a^b f(x)dx$.

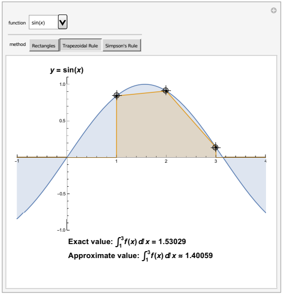
Metod:

- Dela in intervallet $[a, b]$ i ett antal delintervall
- Approximera $f(x)$ i varje delintervall med en funktion som är lätt att integrera

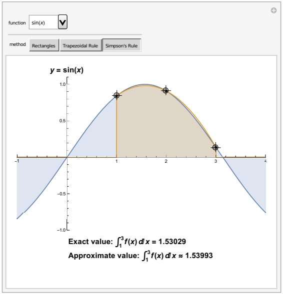
Några alternativ:



Riemannsumma:
$f(x) \approx a$ (konstant)



Trapetsformeln:
$f(x) \approx ax + b$



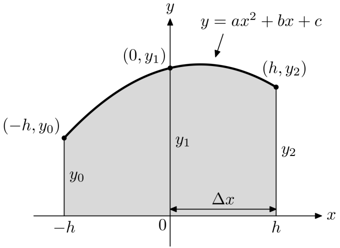
Simpsons formel:
$f(x) \approx ax^2 + bx + c$

Numerisk integration

Simpsons formel

Antag att $f(x) \approx p(x) = ax^2 + bx + c$ i $[-h, h]$:

$$\int_{-h}^{h} (\underbrace{ax^2 + bx + c}_{p(x)})dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-h}^{h} = 2\left(\frac{ah^3}{3} + ch\right)$$



Om $p(x)$ går genom punkterna $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ och (h, y_2) kan vi enkelt bestämma a och c:

$$\begin{cases} p(-h) &= a(-h)^2 + b(-h) + c = y_0 \\ p(0) &= c = y_1 \\ p(h) &= ah^2 + bh + c = y_2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2h^2}(y_2 + y_0 - 2y_1)$$

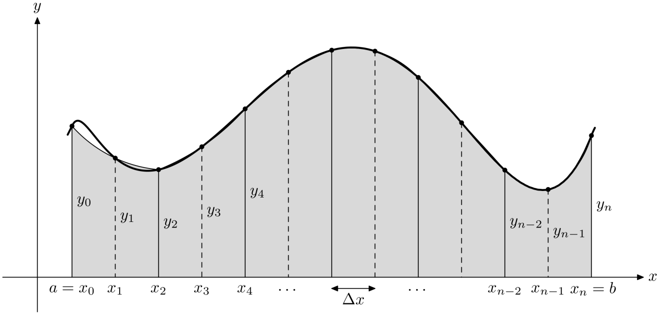
$$\Rightarrow \int_{-h}^{h} p(x)dx = 2\left(\frac{\frac{1}{2h^2}(y_2 + y_0 - 2y_1)h^3}{3} + y_1 h\right) = \frac{(y_2 + y_0 - 2y_1)h}{3} + 2hy_1$$

$$\underset{\Delta x = h}{=} \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Numerisk integration
Simpsons formel

Vi kan utnyttja resultatet för att beräkna ett approximativt värde på integralen

$$\int_a^b f(x)dx$$



Vi delar upp intervallet i ett jämnt antal (n) delintervall med samma längd Δx:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \ldots \quad x_n = a + n\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Numerisk integration
Simpsons formel

Vi kan nu approximera $f(x)$ med ett andragradspolynom $p(x)$ i varje delintervall $[x_i, x_{i+2}]$ och utnyttja vårt tidigare resultat:

$$\int_{-h}^{h} p(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{\Delta x}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+\frac{\Delta x}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

Sats 1 (Simpsons formel)

Om f(x) är fyra gånger kontinuerligt deriverbar på intervallet $[a, b]$ *så är*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{3n}\big(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots \\ &+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)\big) + R_n\end{aligned}$$

där resttermen

$$R_n = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a \le \xi \le b$$

Numerisk integration
Simpsons formel

Exempel 8

Beräkna ett approximativa värde på integralen $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ med Simpsons formel för $n = 4$ och uppskatta felet i approximationen.

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x\,dx &\approx \frac{b-a}{3n}\big(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b)\big)\\ &= \frac{\pi}{12}\Big(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi\Big)\\ &= 2.00455975...\end{aligned}$$

$$|R_4| = \left|\frac{(b-a)^5}{180\cdot n^4} f^{(4)}(\xi)\right| = \left|\frac{\pi^5}{180\cdot 4^4}\sin(\xi)\right| \leq \frac{\pi^5}{180\cdot 4^4} = 0.0066410... \leq 0.01$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2.00 \pm 0.01 \qquad \text{(Anm: Exakt värde på integralen är 2.)}$$