MA2001 Envariabelanalys

Något om integraler

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

24 november 2025

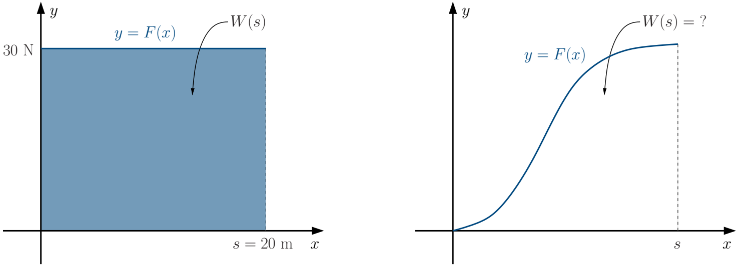
Riemannintegralen

Exempel 1

En låda släpas $s = 20$ m på ett strävt underlag med konstant kraft $F = 30$ N parallell med underlaget. Bestäm det arbete kraften uträttar.

$$\text{Arbetet} = W = F \cdot s = 30 \cdot 20 = 600 \text{ J}$$

- Grafiskt: Arbetet = Arean mellan kurvan $y = F(x)$ och x-axeln



- Hur beräknar vi arbetet om F *inte* är konstant?

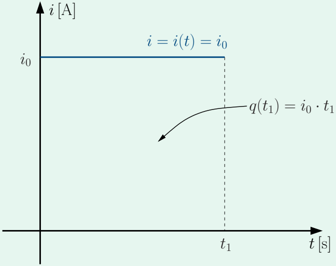
Riemannintegralen

Exempel 2

Genom en ledare flyter en konstant ström i_0. Hur stor laddningsmängd q passerar ett tvärsnitt av ledaren under tiden t_1?

$$q(t_1) = i_0 \cdot t_1$$

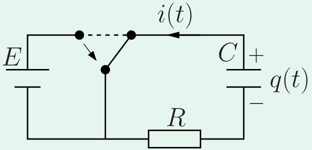
Grafiskt:
Laddningen q som passerar = arean mellan kurvan $i = i(t)$ och t-axeln

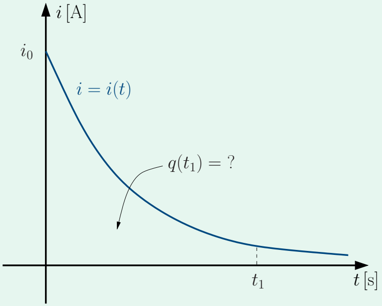


Riemannintegralen

Exempel 3

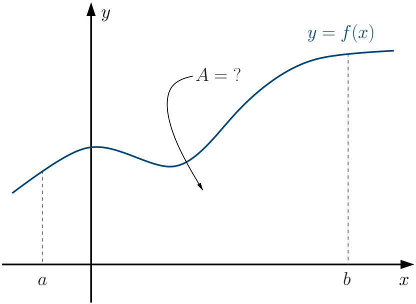
Urladdning av en kondensator:





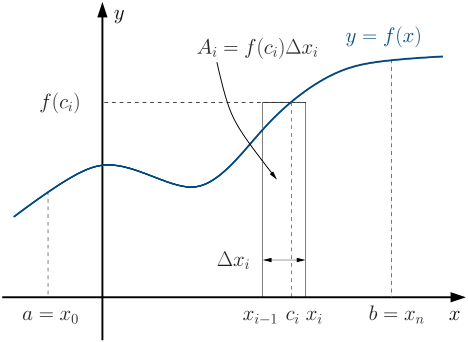
Riemannintegralen

Vi behöver en metod för att beräkna arean av en yta som begränsas av en funktionskurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, och x-axeln.



Riemannintegralen

Metod: Gör en indelning av intervallet $[a, b]$: $\{a = x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n = b\}$



Välj godtyckliga punkter c_i i varje delintervall

$$\Rightarrow A \approx f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}_{\textit{Riemannsumma}}$$

Riemannintegralen

Definition 1 (Riemannintegralen)

Antag att $\{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ är en indelning av $[a, b]$ sådan att $\max(\Delta x_i) \to 0$ då $n \to \infty$ och att $c_i \in [a, b]$ är godtyckligt valda punkter.

- Om gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

existerar och är oberoende av hur punkterna c_i väljs så är $f(x)$ (Riemann)integrerbar över $[a, b]$.

- Gränsvärdet kallas integralen av $f(x)$ från a till b och betecknas

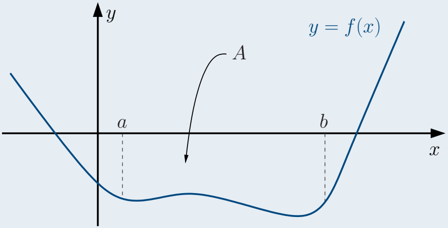
$$\int_a^b f(x)dx$$

- Funktionen $f(x)$ kallas integralens integrand.

Anm: En integral är (något slarvigt uttryckt) en summa av oändligt många oändligt små bitar. Att integrera är alltså samma sak som att summera.

Riemannintegralen

Anm: I definitionen har vi inte förutsatt att $f(x) \geq 0 \, \forall \, x \in [a, b]$.



Om $f(x) \leq 0 \, \forall \, x \in [a, b]$ så är $A = -\int_a^b f(x)dx$.

Riemannintegralen

Är alla funktioner integrerbara?

Exempel 4

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rationellt} \\ 1, & x \text{ irrationellt} \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

- Vi kan välja indelning av $[0, 1]$ så att alla c_i är rationella eller så att alla är irrationella.
- I första fallet blir Riemannsumman 0 och i det andra 1.

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad \text{existerar inte!}$$

Sats 1

f kontinuerlig i $[a, b] \Rightarrow f$ integrerbar över $[a, b]$

Sats 2 (Räknelagar)

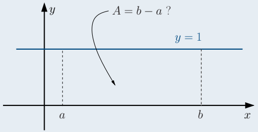
1. α *konstant* $\Rightarrow \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $f(x) \leq g(x) \, \forall \, x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
4. $a \leq c \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Definition 2

$$\int_a^b f(x) = - \int_b^a f(x)dx$$

Anm:

- $\int_a^a f(x)dx = - \int_a^a f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$

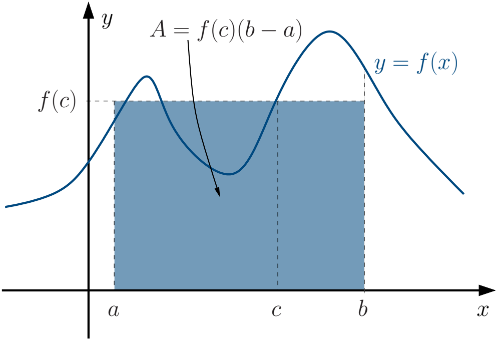


Integralkalkylens medelvärdessats

Sats 3 (Integralkalkylens medelvärdessats)

Om $f(x)$ är kontinuerlig så finns det ett tal $c \in [a, b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



Integralkalkylens medelvärdessats

Exempel 5

Bestäm $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

Lösning:

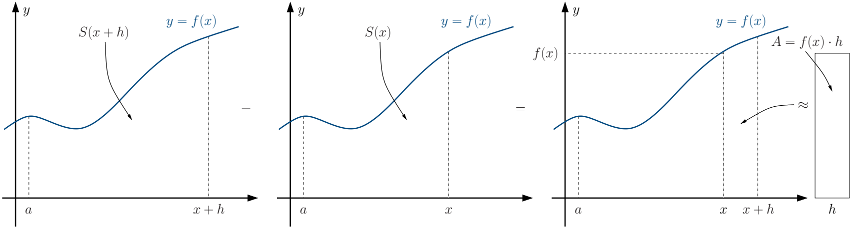
Enligt integralkalkylens medelvärdessats (m.v.s) finns det ett $c_n \in [n, n+1]$, $n \geq 1$, sådant att

$$\int_n^{n+1} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = f(c_n)(n+1-n) = f(c_n) = 1 + \frac{1}{c_n^2} \to 1 \text{ då } n \to \infty$$

Integralkalkylens huvudsats

- Studera funktionen $S(x) = \int_a^x f(t)dt$
- Är $S(x)$ deriverbar dvs existerar

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \quad ?$$



$$\therefore S(x+h) - S(x) \approx f(x) \cdot h \Leftrightarrow \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x) \text{ om } h \text{ är litet.}$$

Är $S'(x) = f(x)$?

Integralkalkylens huvudsats

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt\right)$$

$$\underset{\text{m.v.s}}{=} \frac{1}{h} f(c)(x+h-x) = f(c) \text{ för något } c \in [x, x+h]$$

$$\{h \to 0 \Leftrightarrow c \to x\}$$

$$\to f(x) \text{ då } h \to 0$$

Sats 4 (Integralkalkylens huvudsats)

Om f är kontinuerlig så är $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ deriverbar och $S'(x) = f(x)$.

Exempel 6

- a $S(x) = \int_1^x e^{3t}dt \Rightarrow S'(x) = e^{3x}$
- b $S(x) = \int_1^{x^2} e^{3t}dt = S(g(x))$ där $g(x) = x^2 \Rightarrow S'(x) = S'(g)g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

Beräkning av integraler - Insättningsformeln

Vi har

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow S'(x) = f(x)$$

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så är

$$\begin{aligned} S'(x) &= F'(x) \Leftrightarrow S(x) = F(x) + C \\ \Rightarrow 0 &= \int_a^a f(t)dt = S(a) = F(a) + C \Leftrightarrow F(a) = -C \\ \Rightarrow S(x) &= \int_a^x f(t)dt = F(x) + C = F(x) - F(a) \end{aligned}$$

Sätter vi $x = b$ och $t = x$ får vi

Sats 5 (Insättningsformeln)

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så är

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beräkning av integraler - Insättningsformeln

Integraler i Mathematica:

- `Integrate[Cos[x],{x,-Pi,2*Pi}]`

Exempel 7

Beräkna a) $\int_1^2 x^2 dx$ b) $\int_1^2 e^x dx$ c) $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ d) $\int_{-1}^1 \frac{x^2-1}{1+x^2} dx$

Exempel 8

Beräkna a) $\int_{-3}^3 (|x-2|+|x+1|) dx$ b) $\int_2^4 \frac{4x}{x^3-x^2-x+1} dx$

Exempel 9

Beräkna a) $\int_1^2 x \ln x \, dx$ b) $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x} \, dx$ c) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$