MA2001 Envariabelanalys

Något om differentialekvationer 2

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

3 december 2025

Homogena linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 1

Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + y = 0$.

- Vi söker den allmänna lösningen till differentialekvationer av typen:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_0, a_1 \ \text{godtyckliga konstanter} \tag{1}$$

- Motsvarande 1:a ordningens ekvation $y' + ky = 0$ hade den allmänna lösningen $y(x) = Ce^{-kx}$
- Vi testar därför om $y = Ce^{rx}$, är en lösning till (1):

$$\begin{aligned} y &= Ce^{rx} \Rightarrow y' = Ce^{rx} r \Rightarrow y'' = Ce^{rx} r^2 \\ \Rightarrow y'' + a_1 y' + a_0 y &= Ce^{rx} r^2 + a_1 Ce^{rx} r + a_0 Ce^{rx} = Ce^{rx}(r^2 + a_1 r + a_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y(x) = Ce^{rx} = 0 \\ \text{eller} \\ r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad \leftarrow \text{Karakteristisk ekvation} \end{cases} \end{aligned}$$

Anm: En linjär homogen differentialekvation har alltid en trivial lösning $y(x) = 0$.

Homogena linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Sats 1

Den homogena differentialekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ *har den allmänna lösningen*

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

där r_1 *och* r_2 *är rötter till den karaktäristiska ekvationen* $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ *och* C_1 *och* C_2 *godtyckliga konstanter.*

Anm: Ekvationer av högre grad än 2 löses på motsvarande sätt.

Homogena linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 1 (forts)

- Differentialekvation:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

- Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 1$$

- Allmän lösning enligt Sats 1:

Sats 1

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

$$y(x) = (C_1 x + C_2) e^x$$

Homogena linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 2

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = 0 \\ y(0) = 4,\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Sats 1

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

- Karaktäristisk ekvation: $r^2 + 4r - 5 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -5,\ r_2 = 1$
- Allmän lösning: $y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x$

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 4 \Leftrightarrow C_2 = 4 - C_1 \\ y'(x) &= C_1 e^{-5x}(-5) + C_2 e^x \\ y'(0) &= C_1 e^0(-5) + C_2 e^0 = -5C_1 + C_2 = -5C_1 + 4 - C_1 \\ &= -6C_1 + 4 = -2 \Leftrightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 3 \end{aligned}$$

$\therefore$ Den sökta lösningen är $y(x) = e^{-5x} + 3e^x$.

Linjära differentialoperatorer

Exempel 3

Med hjälp av deriveringsoperatorn D kan $y'' + 2xy' + 3y = e^{3x}$ skrivas som

$$\underbrace{[D^2 + 2xD + 3]}_{\mathcal{L}}\, y = e^{3x} \Leftrightarrow \mathcal{L}(y) = e^{3x}$$

Exempel 4

Differentialoperatorn till $y^{(3)} - e^x y'' + 4y' - \ln x\, y = \arctan x$ är

$$\mathcal{L} = D^3 - e^x D^2 + 4D - \ln x$$

$\mathcal{L}$ kallas en linjär differentialoperator eftersom

$$D^n(ay_1 + by_2) = aD^n y_1 + bD^n y_2 \Rightarrow \mathcal{L}(ay_1 + by_2) = a\mathcal{L}(y_1) + b\mathcal{L}(y_2)$$

Sats 2

$\mathcal{L}(y_1) = h_1(x)$ *och* $\mathcal{L}(y_2) = h_2(x) \Rightarrow \mathcal{L}(ay_1 + by_2) = ah_1(x) + bh_2(x)$

Mer om linjära differentialekvationer

Sats 3

Om $y_p(x)$ är en lösning till

$$\mathcal{L}(y) = h(x) \tag{2}$$

(partikulärlösning) så ges den allmänna lösningen till (2) *av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$.*

Exempel 5

Lös differentialekvationen $\underbrace{y' + 2xy}_{\mathcal{L}(y)} = 2x$

Lösning:

- $\mathcal{L}(y) = 0$ har den allmänna lösningen $y_h(x) = Ce^{-x^2}$
- $y_p(x) = 1$ är en lösning till $\mathcal{L}(y) = 2x$

$\therefore$ Den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 2x$ är $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-x^2} + 1$

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

Vi begränsar oss till fallen då

1. $h(x) = p(x) \quad \leftarrow$ polynom
2. $h(x) = p(x)e^{kx}$
3. $h(x) = A \sin kx$ eller $h(x) = A \cos kx$
4. $h(x) =$ produkt av 1-3
5. $h(x) =$ summa av 1-4

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

1. $h(x) = p(x)$

Exempel 6

Bestäm en lösning till $y'' - 2y' + y = 2x^2 - 3x + 1$.

- Ansats: $y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p' = 2ax + b \Rightarrow y_p'' = 2a$
- Insättning i differentialekvationen:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c = 2x^2 - 3x + 1 \\ &\Leftrightarrow a = 2,\ b = 5,\ c = 7 \end{aligned}$$

$\therefore y_p = 2x^2 + 5x + 7$

Partikulärlösning till $y'' + a_1 y' + a_0 y = p(x)$

Ansats:

- $a_0 \neq 0 :\ y_p = q(x)$ polynom av samma grad som $p(x)$
- $a_0 = 0,\ a_1 \neq 0 :\ y_p = xq(x)$
- $a_0 = a_1 = 0$: Integrera 2 gånger!

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

2. $h(x) = p(x)e^{kx}$

Exempel 7

Bestäm en lösning till $y'' - 2y' + y = (3x+1)e^{2x}$.

- Ansats: $y_p = z(x)e^{2x} \quad \leftarrow \quad z(x)$ hjälpfunktion

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p' &= z'e^{2x} + ze^{2x} \cdot 2 = (z' + 2z)e^{2x} \\ \Rightarrow y_p'' &= (z'' + 2z')e^{2x} + (z' + 2z)e^{2x} \cdot 2 = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x} \end{aligned}$$

- Insättning:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= (z'' + 4z' + 4z - 2(z' + 2z) + z)e^{2x} = (z'' + 2z' + z)e^{2x} \\ &= (3x+1)e^{2x} \Leftrightarrow z'' + 2z' + z = 3x + 1 \end{aligned}$$

dvs en ekvation med ett polynom i högerledet (typ 1).
Ansatsen $z_p = ax + b \Rightarrow y(x) = z(x)e^{2x} = (3x-5)e^{2x}$.

Partikulärlösning till $y'' + a_1 y' + a_0 y = p(x)e^{kx}$

Ansats: $y_p = z \cdot e^{kx}$. Insättning ger ekvation av typen $\mathcal{L}(y) = p(x)$.

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 8

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = (3x+1)e^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning:

Enligt Exempel 1 och 7 är den allmänna lösningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 x + C_2)e^x + (3x-5)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= (C_1 \cdot 0 + C_2)e^0 + (3 \cdot 0 - 5)e^{2\cdot 0} = C_2 - 5 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 6 \\ y'(x) &= C_1 e^x + (C_1 x + C_2)e^x + 3e^{2x} + (3x-5)e^{2x} \cdot 2 \\ &= (C_1 x + C_1 + C_2)e^x + (6x-7)e^{2x} \\ y'(0) &= (C_1 \cdot 0 + C_1 + C_2)e^0 + (6 \cdot 0 - 7)e^{2\cdot 0} = C_1 + C_2 - 7 \\ &= C_1 + 6 - 7 = C_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 2,\ C_2 = 6 \end{aligned}$$

$\therefore$ Den sökta lösningen är $y(x) = (2x+6)e^x + (3x-5)e^{2x}$.

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

3. $h(x) = A\sin kx$ *eller* $h(x) = A\cos kx$

Exempel 9

Bestäm en partikulärlösning till $\mathcal{L}(y) = y'' - 2y' + y = 25\sin 2x$.

Lösning:

$$e^{i2x} = \cos 2x + i\sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \operatorname{Im}\left(e^{i2x}\right)$$

- Vi kan lösa hjälpekvationen $\mathcal{L}(y) = 25e^{i2x}$ enligt (2)
- Den sökta lösningen ges av imaginärdelen av lösningen till hjälpekvationen.

$$\begin{aligned} \text{Ansats: } y = ze^{2ix} \quad &\Rightarrow \quad y' = (2iz + z')e^{2ix} \Rightarrow y'' = (z'' + 4iz' - 4z)e^{2ix} \\ \text{Insättning i diff.ekv} \quad &\Rightarrow \quad y = (-3 + 4i)e^{2ix} \end{aligned}$$

$\therefore$ En lösning till $\mathcal{L}(y) = 25\sin 2x$ är

$$y_p = \operatorname{Im}\left((-3+4i)e^{2ix}\right) = \operatorname{Im}\left((-3+4i)(\cos 2x + i\sin 2x)\right) = 4\cos 2x - 3\sin 2x$$

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

3. $h(x) = A \sin kx$ *eller* $h(x) = A \cos kx$

Partikulärlösning till $y'' + a_1 y' + a_0 y = A \sin kx$ eller $A \cos kx$

- Bestäm en partikulärlösning y till hjälpekvationen

$$\mathcal{L}(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = Ae^{ikx}$$

  enligt (1).
- En partikulärlösning y_p till $\mathcal{L}(y) = h(x)$ ges sedan av
  - $\operatorname{Re} y(x)$ om $h(x) = A \cos kx$
  - $\operatorname{Im} y(x)$ om $h(x) = A \sin kx$

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

4. Produkt av 1-3

Exempel 10

Bestäm en partikulärlösning till $y'' - y = 50xe^{2x}\cos x$.

Lösning:

Lös hjälpekvationen $y'' - y = 50xe^{(2+i)x}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= ((2+11i) + (5-10i)x)e^{(2+i)x} \\ \Rightarrow y_p &= \operatorname{Re}(y) = (2+5x)\cos x + (-11+10x)\sin x \end{aligned}$$

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

5. Summa av 1-4

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 11

Bestäm en partikulärlösning till $y'' - 2y' + y = (3x+1)e^{2x} + 25\sin 2x$.

Lösning:

Sats 2

$\mathcal{L}(y_1) = h_1,\ \mathcal{L}(y_2) = h_2 \Rightarrow \mathcal{L}(y_1 + y_2) = h_1 + h_2$

$$\text{Ex 7 och 9} \Rightarrow \quad y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = (3x-5)e^{2x} + 4\cos 2x - 3\sin 2x$$

Exempel 12 (Tentamen 120112)

Lös begynnelsevärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2xe^x, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Partikulärlösning till ekvationen $y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$

Exempel 12 i Mathematica:

- Allmän lösning:

```
DSolve[y''[x]-3y'[x]+2y[x]==2x*Exp[x],y[x],x]
```

- Sökt lösning:

```
DSolve[{y''[x]-3y'[x]+2y[x]==2x*Exp[x],y[0]==1,y'[0]==0},y[x],x]
```