MA2001 Envariabelanalys

Något om differentialekvationer 1

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

1 december 2025

Radioaktivt sönderfall

Modell:

- $N(t) =$ Antalet radioaktiva kärnor vid tiden t
  Eftersom antalet kärnor antas vara stort kan vi betrakta $N(t)$ som en kontinuerlig funktion.
- $N_0 = N(0) =$ Antalet vid $t = 0$
- Antalet sönderfall per tidsenhet vid tiden t är proportionellt mot antalet radioaktiva kärnor vid denna tidpunkt: $-N'(t) = kN(t)$

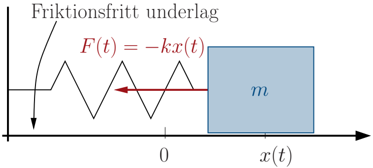
$\therefore$ Antalet radioaktiva kärnor vid tiden t beskrivs av

$$\begin{cases} N'(t) + kN(t) = 0, \; k > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Anm: Sönderfallskonstanten k är ämnesspecifik och är kopplad till ämnets halveringstid $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

Svängningsproblem



$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

1. Om all friktion försummas ger Newtons 2:a lag:

$$\begin{cases} F_{\text{res}}(t) = ma(t) = mv'(t) = mx''(t) \\ F_{\text{res}}(t) = -kx(t) \quad \text{(Hooks lag)} \end{cases} \Leftrightarrow mx''(t) = -kx(t)$$

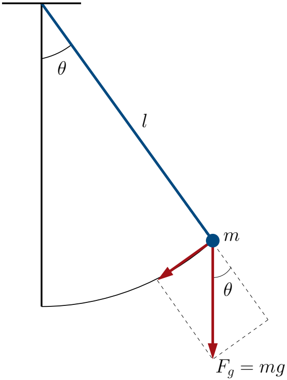
$\Rightarrow$ Läget $x(t)$ beskrivs av begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \\ x(0) = x_0,\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

2. Extern kraft (någon puttar på):

$$\Rightarrow F_{\text{res}}(t) = -kx(t) + F_{\text{ext}}(t) \Rightarrow \begin{cases} x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F_{\text{ext}}(t)}{m} \\ x(0) = x_0,\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Enkel pendel



$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

1. Om all friktion försummas:

$$\begin{cases} F_{\text{res}}(t) = ma(t) = m(l\theta(t))'' = ml\theta''(t) \\ F_{\text{res}}(t) = mg\sin\theta(t) \end{cases}$$

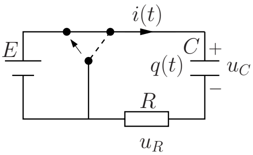
$\Rightarrow$ Läget $\theta(t)$ beskrivs av begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

2. För små utslag är $\frac{\sin\theta}{\theta} \approx 1 \Leftrightarrow \sin\theta \approx \theta$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

Uppladdning av kondensator



$$\begin{cases} u_C(t) + u_R(t) = E \\ u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \\ u_R(t) = Ri(t) = Rq'(t) \\ u_C(0) = u_0 = \frac{q_0}{C} \end{cases} \Rightarrow$$

- Laddningen:

$$\begin{cases} q'(t) + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{E}{R} \\ q(0) = Cu_0 = q_0 \end{cases}$$

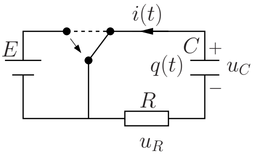
- Spänningen:

$$\begin{cases} u_C'(t) + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{E}{RC} \\ u_C(0) = u_0 \end{cases}$$

- Strömmen:

$$\begin{cases} i'(t) + \frac{1}{RC} i(t) = 0 \\ i(0) = \frac{u_0}{R} = i_0 \end{cases}$$

Urladdning av kondensator



$$\begin{cases} u_C(t) + u_R(t) = 0 \\ u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \\ u_R(t) = Ri(t) = Rq'(t) \\ u_C(0) = u_0 = \frac{q_0}{C} \end{cases} \Rightarrow$$

- Laddningen:

$$\begin{cases} q'(t) + \frac{1}{RC} q(t) = 0 \\ q(0) = Cu_0 = q_0 \end{cases}$$

- Spänningen:

$$\begin{cases} u_C'(t) + \frac{1}{RC} u_C(t) = 0 \\ u_C(0) = u_0 \end{cases}$$

- Strömmen:

$$\begin{cases} i'(t) + \frac{1}{RC} i(t) = 0 \\ i(0) = \frac{u_0}{R} = i_0 \end{cases}$$

Populationsmodell

Modell för kaninkoloni:

- $N(t) =$ Antalet kaniner vid tiden t.
  Om antalet kaniner är stort kan vi betrakta $N(t)$ som en kontinuerlig funktion.
- $N_0 = N(0) =$ Antalet kaniner vid $t = 0$
- Förändringen av antalet per tidsenhet vid tiden t är proportionell mot
  - Antalet kaniner
  - Skillnaden mellan antalet kaniner och det maximala antalet kaniner (M)

$\therefore$ Antalet kaniner vid tiden t beskrivs av

$$\begin{cases} N'(t) = kN(t)(M - N(t)),\ k > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Terminologi

- En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation som innehåller derivator av en okänd funktion av en variabel.
- En ekvation som innehåller derivator av en okänd funktion av flera variabler kallas en partiell differentialekvation (PDE).
- Om differentialekvationen inte innehåller högre derivator än n:te derivatan av den okända funktionen så är den av ordningen n.
- En lösning till en ODE i ett intervall I är en funktion $y = y(x)$ sådan att y uppfyller ekvationen för alla x i I.
- Mängden av alla lösningar till en ODE kallas den allmänna lösningen.
- En ODE kallas linjär om den kan skrivas som

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = h(x) \qquad (1)$$

  dvs om den beror linjärt på y och dess derivator.
- Den linjära ODE:n (1) kallas homogen om $h = 0$ annars inhomogen.

Terminologi

Exempel 1

- $xy'' + 3y' - x^2y = \cos x$ är linjär, inhomogen och av 2:a ordn.
- $y^{(3)} + 6xy'' + \cos x\, y' - 6y = 0$ är linjär, homogen och av 3:dje ordn.
- $y^2y' + 6x\cos y - 3 = \sin x$ är icke-linjär och av 1:a ordn.

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen
$y' + g(x)y = h(x)$

Exempel 2 (Radioaktivt sönderfall)

$$\begin{cases} N'(t) + kN(t) = 0,\ k > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Hur bestämmer vi $N(t)$?
Vi kan utnyttja produktregeln $D(fg) = f'g + fg'$
Multiplicera ekvationen med e^{kt}:

$$\begin{aligned} N'(t)e^{kt} + N(t)e^{kt}k &= D(N(t)e^{kt}) = 0 \\ \Leftrightarrow N(t)e^{kt} &= C \quad \leftarrow \text{Godtycklig konstant} \\ \Leftrightarrow N(t) &= Ce^{-kt} \quad \leftarrow \text{Allmän lösning} \\ N(0) &= Ce^{0} = C = N_0 \end{aligned}$$

$\therefore$ Antalet radioaktiva kärnor vid tiden t är $N(t) = N_0 e^{-kt}$

Anm: Ekvationen $y'(x) + ky(x) = 0$ har den allmänna lösningen $y(x) = Ce^{-kx}$

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen

$y' + g(x)y = h(x)$

Exempel 3

Hur lång tid tar det innan hälften av kärnorna sönderfallit?

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-kT_{1/2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kT_{1/2}} \Leftrightarrow kT_{1/2} = \ln 2$$

$\therefore$ Halveringstiden $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{k}$

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen

$y' + g(x)y = h(x)$

Exempel 4

Bestäm den allmänna lösningen till $y' + \frac{1}{x}y = x^2$, $x > 0$.

Lösning:

Multiplicerar vi ekvationen med x får vi:

$$\underbrace{y'x + y \cdot 1}_{D(y \cdot x)} = x^3 \Leftrightarrow D(y \cdot x) = x^3 \Leftrightarrow y \cdot x = \frac{x^4}{4} + C \leftarrow \text{ godt. konst.}$$

$\therefore$ Den allmänna lösningen är $y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$

Genom att multiplicera ekvationen ovan med x kan vänsterledet skrivas som derivatan av en produkt. x kallas integrerande faktor.

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen
$y' + g(x)y = h(x)$

Exempel 5

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' - 2xy = 2x \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \leftarrow \text{Integrerande faktor?}$$

- I exemplet med radioaktivt sönderfall ($N' + kN = 0$) var den integrerande faktorn e^{kt} och kt är en primitiv funktion till k.
- k motsvaras här av $g(x) = -2x$ och vi multiplicerar därför ekvationen med $e^{G(x)} = e^{-x^2}$:

$$\begin{aligned} y'e^{-x^2} + ye^{-x^2}(-2x) &= D(y \cdot e^{-x^2}) = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow ye^{-x^2} = -e^{-x^2} + C \\ \Leftrightarrow y(x) &= Ce^{x^2} - 1 \quad \leftarrow \text{Allmän lösning} \\ y(0) &= C - 1 = 2 \Leftrightarrow C = 3. \end{aligned}$$

$\therefore$ Den sökta lösningen är $y(x) = 3e^{x^2} - 1$.

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen

$y' + g(x)y = h(x)$

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Sammanfattning

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen:

$$y' + g(x)y = h(x)$$

Lösningsmetod:

- Multiplicera ekvationen med den integrerande faktorn $e^{G(x)}$ där $G'(x) = g(x)$.
- Vänsterledet kan därefter skrivas som $D(y \cdot e^{G(x)})$.
- Slutligen integreras båda leden och $y(x)$ kan sedan lösas ut.

Exempel 6

Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} xy' + 2y = \dfrac{\ln x}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen
$y' + g(x)y = h(x)$

Exempel 7

Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} xy' - 2y + \frac{x^4}{1+x^2} = 0, \; x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen

$y' + g(x)y = h(x)$

Exempel 8 (Uppladdning av kondensator)

$$\begin{cases} u_C'(t) + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E}{\tau}, & \tau = RC \text{ (tidskonstanten)} \\ u_C(0) = u_0 \end{cases}$$

Integrerande faktor: $e^{G(x)} = e^{t/\tau}$

$$\begin{aligned} u_C' e^{t/\tau} \quad &+ \quad u_C e^{t/\tau}\frac{1}{\tau} = D(u_C e^{t/\tau}) = \frac{E}{\tau}e^{t/\tau} \\ \Leftrightarrow u_C e^{t/\tau} \quad &= \quad \int \frac{E}{\tau}e^{t/\tau}\,dt = \frac{E}{\tau}e^{t/\tau}\tau + C = Ee^{t/\tau} + C \\ u_C(t) \quad &= \quad E + Ce^{-t/\tau} \\ u_C(0) \quad &= \quad E + C = u_0 \Leftrightarrow C = u_0 - E \end{aligned}$$

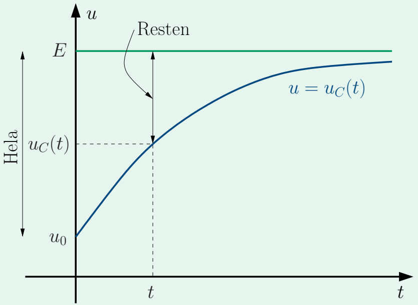
Spänningen över kondensatorn ges alltså av:

$$u_C(t) = E + (u_0 - E)e^{-t/\tau}$$

Linjära differentialekvationer av 1:a ordningen
$y' + g(x)y = h(x)$

Exempel 8 (Uppladdning av kondensator (forts))

$$\frac{E - u_0}{E - u_C(t)} = \frac{\text{"Hela"}}{\text{"Resten"}} = \frac{E - u_0}{E - (E + (u_0 - E)e^{-t/\tau})} = e^{t/\tau}$$



$\therefore$ Grafen ger direkt ett ungefärligt värde på tidskonstanten $\tau = RC$:

$$\tau = \frac{t}{\ln\left(\frac{\text{"Hela"}}{\text{"Resten"}}\right)}$$

Differentialekvationer med separabla variabler
$g(y)y' = h(x)$

Exempel 9

Lös differentialekvationen $3y^2y' = \sin x \quad \leftarrow$ icke-linjär.

Ekvationen är av formen

$$g(y)y' = h(x) \tag{2}$$

och kallas separabel. Den kan lösas med hjälp av kedjeregeln.
Om $G'(y) = g(y)$ och $H'(x) = h(x)$ får vi

$$\begin{aligned} D(G(y(x))) &= G'(y)y' = g(y)y' = h(x) = DH(x) \\ \Leftrightarrow G(y) &= H(x) + C \Leftrightarrow \int g(y)dy = \int h(x)dx \end{aligned}$$

dvs ett samband mellan y och x.
Använder vi beteckningen $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ kan (2) skrivas som

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$$

Differentialekvationer med separabla variabler

$g(y)y' = h(x)$

Sammanfattning

Separabla differentialekvationer:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$$

Lösningsmetod: ”Multiplicera båda leden med *dx*” och integrera:

$$\int g(y)dy = \int h(x)dx$$

Ger samband mellan *y* och *x* där man ibland kan lösa ut *y*.

Exempel 9 (forts)

$$3y^2\frac{dy}{dx} = \sin x \Leftrightarrow \int 3y^2 dy = \int \sin x\, dx \Leftrightarrow y^3 = -\cos x + C$$

$\therefore$ Den allmänna lösningen ges av $y(x) = (C - \cos x)^{\frac{1}{3}}$

Differentialekvationer med separabla variabler $g(y)y' = h(x)$

Exempel 10

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = y^2(1 + xe^{-x}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exempel 10 i Mathematica:

- Allmän lösning:
  `DSolve[y'[x]==y[x]^2(1+x*Exp[-x]),y[x],x]`
- Sökt lösning:
  `DSolve[{y'[x]==y[x]^2(1+x*Exp[-x]),y[0]==1},y[x],x]`

Exempel 11 (Tentamen 090116, uppgift 4b)

Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$(1 + x^2)y' = x^2y^2, \quad x > 0,$$

för vilken $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 1$. *(4p)*