HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Måndagen den 12 januari 2026
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet *(2p)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{e^x + \ln(1-x) - 1}\,.$$

(b) Beräkna integralen *(3p)*

$$\int_0^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}\,dx\,.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terrasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

4. (a) Härled formeln för partiell integration. *(1p)*

(b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy' - 2y - \frac{x^3}{1+x^2} = 0,$$

för vilken $y(1) = \pi$. *(4p)*

5. (a) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^{1/4} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

är konvergent. *(1p)*

(b) Maclaurinutveckla $\cos x$ till och med ordning 3 och utnyttja polynomet för att beräkna ett approximativt värde på den generaliserade integralen i (a). *(2p)*

(c) Visa att approximationen i (b) har 4 korrekta decimaler d.v.s. att felet är mindre än $0.5 \cdot 10^{-4}$. *(2p)*

6. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner. *(1p)*

(b) IT-ingenjören Sara har fått i uppgift att uppskatta hur antalet internetanvändare i världen ökar. År 2002 uppskattades andelen internetanvändare till 10% och år 2018 var andelen 50%. Sara har kommit fram till att följande modell beskriver denna ökning: Andelen som använder internet ökar med en hastighet som vid varje tidpunkt är proportionell mot produkten av andelen som använder internet och andelen som inte använder internet. När kommer andelen internetanvändare i världen passera 90% om vi förutsätter att Saras modell beskriver verkligheten korrekt? *(4p)*

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Måndagen den 12 januari 2026
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$):

$$\begin{aligned} e^x + \ln(1-x) - 1 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) + (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - 1 \\ &= -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3:

$$x\cos x - \sin x = x\Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\Big) = -\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

Vi får till slut

$$\frac{x\cos x - \sin x}{e^x + \ln(1-x) - 1} = \frac{-\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x)} \to 2 \text{ då } x \to 0.$$

(b) Vi gör en variabelsubstitution för att bli av med roten:

$$\begin{aligned} &\int_0^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}dx \quad \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \\ \Rightarrow dx = 2tdt \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ x = 4 \Leftrightarrow t = 2 \end{array}\right] \\ &= \int_0^2 \frac{1}{(1+t)^2} 2tdt = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{(1+t)^2}dt = 2\int_0^2 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt \\ &= 2\left[\ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right]_0^2 = 2\ln 3 - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

2. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 3y' + 2y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = e^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Det karaktäristiska polynomet $p(r) = r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$ har nollställena $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom e^{-x} är en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör standardansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 3y' + 2y = (z'' - 2z' + z + 3(z' - z) + 2z)e^{-x} = (z'' + z')e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow z'' + z' = 1.$$

Vi ser direkt att $z = x$ är en lösning och vi får $y_p = xe^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + xe^{-x}.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned}
y(0) &= C_1 + C_2 + 0 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 - C_1 \\
y'(x) &= -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} + e^{-x} - xe^{-x} = (-C_1 + 1 - x)e^{-x} - 2(1 - C_1)e^{-2x} \\
&\Rightarrow y'(0) = -C_1 + 1 - 2(1 - C_1) = C_1 - 1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 0,\, C_2 = 1.
\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = e^{-2x} + xe^{-x}.$$

3. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2) - (x^2 - x - 1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = 3.
\end{aligned}$$

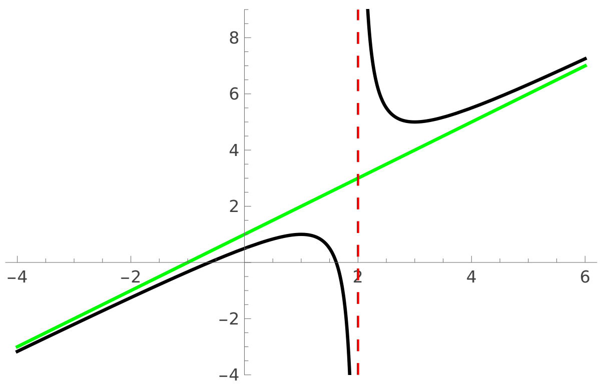
Sedan undersöker vi derivatans tecken och tar förutom de stationära punkterna även med punkten $x = 2$ där f och f' inte är definierade: Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan

x		1		2		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

$y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll för $x = 2$ medan täljaren är skild från noll för $x = 2$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 2$. Pga att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \underbrace{x + 1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{1}{x - 2}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal maximipunkt i $x = 1$ med värdet $f(1) = 1$ och en lokal minimipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = 5$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 2$ samt den sneda asymptoten $y = x + 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

4. (a) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$\begin{aligned}
D(Fg) = F'g + Fg' = fg + Fg' &\Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg' \\
\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx &= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.
\end{aligned}$$

(b) Detta är en linjär differentialekvation:

$$xy' - 2y - \frac{x^3}{1 + x^2} = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = \frac{x^2}{1 + x^2}\ .$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{x^2}$ ger:

$$y'\frac{1}{x^2} + y(-\frac{2}{x^3}) = D\left(y\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow y\frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$
$$\Leftrightarrow y(x) = x^2(\arctan x + C) \quad \leftarrow \text{ Allmän lösning}$$

där C är en godtycklig konstant. Villkoret $y(1) = \pi$ ger nu

$$y(1) = 1^2(\arctan 1 + C) = \frac{\pi}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \frac{3\pi}{4}$$

och den sökta lösningen är därför

$$y(x) = x^2\left(\arctan x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

5. (a) Integralen är generaliserad i $x = 0$. Eftersom $0 \le \cos x \le 1$ för $0 \le x \le 1$ får vi:

$$0 \le \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

och eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ (dvs. $\int_0^{1/4} \frac{1}{x^{1/2}}dx$ är konvergent) kan vi dra slutsatsen att den sökta integralen är konvergent.

Anm: En primitiv funktion till integranden kan inte uttryckas med elementära funktioner så det är inte lönt att försöka visa konvergensen genom att beräkna integralen med insättningsformeln.

(b) Med $f(x) = \cos x$ ger Maclaurins formel för $n = 3$:

$$\cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(\xi)x^4}{4!} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{p_3(x)} + \underbrace{\frac{\cos(\xi)x^4}{4!}}_{R_3(x)}$$

där ξ är ett tal mellan 0 och x. Observera att x^3-termen är noll och därför är $\cos x$ utvecklad t.o.m. ordning 3 även om polynomet har grad 2. Vi får nu

$$\int_0^{1/4} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx \approx \int_0^{1/4} \frac{p_3(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{1/4} \frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}}dx \quad \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \ge 0 \\ \Rightarrow dx = 2tdt \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$= \int_0^{1/2} \frac{1-\frac{t^4}{2}}{t}2tdt = \int_0^{1/2}\left(2 - t^4\right)dt = \left[2t - \frac{t^5}{5}\right]_0^{1/2}$$
$$= 1 - \frac{1}{5\cdot 2^5} = \frac{159}{160} \quad (= 0.99375).$$

(c) Storleken av felet i approximationen i (b) ges av

$$\left|\int_0^{1/4} \frac{R_3(x)}{\sqrt{x}}dx\right| = \left|\int_0^{1/4} \frac{\frac{\cos(\xi)x^4}{4!}}{\sqrt{2}}dx\right| \le \frac{\cos(0)}{4!}\int_0^{1/4} \frac{x^4}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{24}\int_0^{1/4} \frac{x^4}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{12}\int_0^{1/2} t^8 dt$$
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{t^9}{9}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{12\cdot 9\cdot 512} < \frac{1}{10\cdot 4\cdot 500} = \frac{1}{20000} = 0.5\cdot 10^{-4}$$

där vi utnyttjade samma variabelsubstitution som i (b).

6. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ då } h \to 0$$

dvs $D(fg) = f'g + fg'$.

(b) Sätter vi $y(t)$ = andelen internetanvändare vid tiden t räknat från år 2002, innebär Saras modell att

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t)(1-y(t)), \\ y(0) = 1/10. \end{cases} \tag{2}$$

$y = 1$ är en lösning till (2) men det är inte den vi söker eftersom $y(0) \neq 1$. Vi kan därför dividera med $1 - y$ och ser då att differentialekvationen är separabel:

$$\frac{1}{y(1-y)}y' = k.$$

Integrering av båda leden:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(1-y)}dy &= \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = \ln|y| - \ln|1-y| = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = kt + C_1 \\ \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} &= \pm e^{kt+C_1} = \pm e^{C_1}e^{kt} = C_2e^{kt} \quad (C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0) \\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{e^{kt}}{e^{kt} + C_3} \quad \text{där } C_3 = \frac{1}{C_2}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till (2) ges nu av

$$y(t) = \frac{e^{kt}}{e^{kt} + C}$$

där C är en godtycklig konstant och $C = 0$ motsvarar lösningen $y = 1$ ovan.
Från begynnelsevillkoret får vi

$$y(0) = \frac{e^0}{e^0 + C} = \frac{1}{1+C} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow C = 9$$

Med hjälp av informationen att andelen efter 16 år (2018) är 50%, dvs $y(16) = 1/2$, kan proportionalitetskonstanten bestämmas:

$$y(16) = \frac{e^{16k}}{e^{16k} + 9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{8}$$

Vi har alltså

$$y(t) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{8}t}}{e^{\frac{\ln 3}{8}t} + 9} = \frac{3^{t/8}}{3^{t/8} + 9}$$

Det år när andelen internetanvändare når 90% ges nu av:

$$y(t) = \frac{3^{t/8}}{3^{t/8} + 9} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow t = 32$$

dvs år 2034.