HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Måndagen den 13 januari 2025
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet (*2p*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \ln(1+x) - 1}{x\cos(x) - \sin(x)}.$$

   (b) Beräkna integralen (*3p*)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx\,.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{3+x^2}{1-x}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 6xe^{-x}, \\ y(0) = -1,\, y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av e^x. (*1p*)

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy' + y = e^x + 2x\,,$$

   för vilken $\lim_{x\to 0} y(x) = 1$. (*4p*)

5. (a) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$$

   är konvergent. (*1p*)

   (b) Maclaurinutveckla $\sin x$ till och med ordning 4 och utnyttja polynomet för att beräkna ett approximativt värde på den generaliserade integralen i (a). (*2p*)

   (c) Visa att approximationen i (b) har två korrekta decimaler d.v.s. att felet är mindre än $0.5 \cdot 10^{-2}$. (*2p*)

6. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner $f(x)$ och $g(x)$. (*1p*)

   (b) En smittsam men icke-dödlig sjukdom sprids i en stad. Enligt epidemiingenjören Kajsas modell är den hastighet med vilken andelen sjuka förändras proportionell mot andelen sjuka och andelen friska. En viss dag är halva befolkningen sjuk. Om spridningshastigheten skulle fortsätta vara så stor som vid denna tidpunkt skulle hela befolkningen varit sjuk n dagar därefter. Hur stor andel av befolkningen kommer verkligen att vara sjuk efter n dagar om smittspridningen följer Kajsas modell och antalet invånare i staden är konstant? (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Måndagen den 13 januari 2025
Skrivtid: 15.00-20.00

Lösningsförslag

1. (a) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren:

$$x\cos x - \sin x = x(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots) - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots) = -\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 utvecklar vi även täljaren t.o.m. ordning 3. Utnyttjar vi entydigheten hos Maclaurinutvecklingen ($-x \to 0$ då $x \to 0$) får vi:

$$\begin{aligned} e^{-x} + \ln(1+x) - 1 &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} \cdots + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - 1 \\ &= \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

Vi får till slut

$$\frac{e^{-x} + \ln(1+x) - 1}{x\cos x - \sin x} = \frac{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x)}{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)} \to -\frac{1}{2} \text{ då } x \to 0.$$

(b) Vi gör först en variabelsubstitution och sedan partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{2x}+1}dx \quad & \begin{bmatrix} t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 1,\ x = \ln 2 \Leftrightarrow t = 2 \end{bmatrix} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{(t^2+1)t}dt = \int_1^2 \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)t}dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt \\ &= \left[\ln|t| - \frac{\ln(t^2+1)}{2}\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{\ln 5}{2} - (0 - \frac{\ln 2}{2}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right). \end{aligned}$$

2. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{3+x^2}{1-x} \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x(1-x) - (3+x^2)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{x^2-2x-3}{(1-x)^2} = -\frac{(x+1)(x-3)}{(1-x)^2} \\ \Leftrightarrow x = -1 & \text{ eller } x = 3. \end{aligned}$$

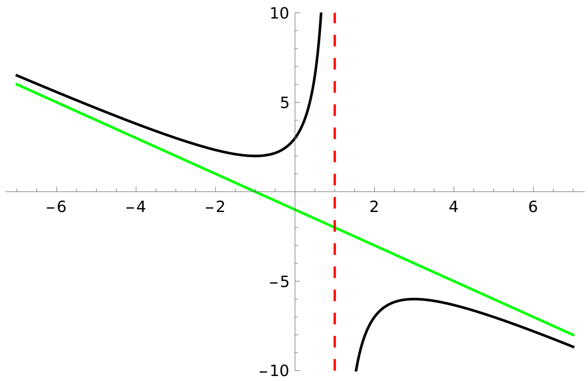
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 1$ där f och f' inte är definierade:

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$*$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$*$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 1$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 1$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{3+x^2}{1-x} = \underbrace{-x-1}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{4}{1-x}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = -1$ med värdet $f(-1) = 2$, samt samt en lokal maximipunkt i $x = 3$ med värdet $f(3) = -6$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 1$ samt den sneda asymptoten $y = -x - 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{3+x^2}{1-x}$.

3. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 2y' + y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 6xe^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$ har rötterna $r_1 = r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 2y' + y = (z'' - 2z' + z + 2(z' - z) + z)e^{-x} = z''e^{-x} = 6xe^{-x} \Leftrightarrow z'' = 6x. \tag{2}$$

Integrering 2 ggr ger direkt att $z = x^3$ är en lösning och vi får $y_p = x^3e^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)e^{-x} + x^3e^{-x}.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2e^0 = C_2 = -1, \\ y'(x) &= C_1e^{-x} - C_1xe^{-x} - C_2e^{-x} + 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} \\ \Rightarrow y'(0) &= C_1 - C_2 = C_1 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

och den sökta lösningen är

$$y(x) = (x^3 - 1)e^{-x}.$$

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = e^x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^xe^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1 \text{ (s.g.v.)}} \to e^x \cdot 1 = e^x \text{ då } h \to 0$$

dvs $De^x = e^x$.

(b) Detta är en linjär differentialekvation

$$xy' + y = e^x + 2x$$

där vi ser att vänsterledet är derivatan av yx dvs

$$y'x + y \cdot 1 = D(yx) = e^x + 2x \Leftrightarrow yx = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C.$$

Den allmänna lösningen ges nu av

$$y(x) = \frac{e^x + C}{x} + x$$

där C är en godtycklig konstant. Eftersom vi vet att $\lim_{x\to 0} y(x) = 1$ får vi

$$\frac{e^x + C}{x} + x \to 1 \text{ då } x \to 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + C}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0 \Leftrightarrow C = -1$$

där vi utnyttjade standardgränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = \frac{e^x - 1}{x} + x.$$

Anm: Om vi inte direkt ser att vänsterledet är derivatan av yx kan vi utnyttja standardmetoden och skriva om ekvationen på normalform (dividera med x)

$$y' + \frac{1}{x} y = e^x$$

och sedan multiplicera med den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = \pm x$ vilket ger tillbaka $D(yx)$ i vänsterledet (oavsett om vi använder x eller $-x$).

5. (a) Integralen är generaliserad i $x = 0$. För $x \geq 0$ är $x \geq \sin x$ och vi får:

$$0 \leq \frac{\sin x}{x^{3/2}} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{x}{x} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

och eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ (dvs. $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ är konvergent) kan vi dra slutsatsen att den sökta integralen är konvergent.

Anm 1: En primitiv funktion till integranden kan inte uttryckas med elementära funktioner så det är inte lönt att försöka visa konvergensen genom att beräkna integralen med insättningsformeln.

Anm 2: För den som vill ha ett bevis för olikheten $x \geq \sin x$ för $x \geq 0$ kan det t.ex. fås genom att studera funktionen $f(x) = x - \sin x$, $x \geq 0$. Vi har $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ är växande $\Rightarrow f_{\min} = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ för $x \geq 0$.

(b) Med $f(x) = \sin x$ ger Maclaurins formel för $n = 4$:

$$\sin x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(\xi)x^5}{5!} = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{p_4(x)} + \underbrace{\frac{\cos(\xi)x^5}{5!}}_{R_4(x)}$$

där ξ är ett tal mellan 0 och x. Observera att x^4-termen är noll och därför är $\sin x$ utvecklad t.o.m. ordning 4 även om polynomet har grad 3.

Vi får nu

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx \approx \int_0^1 \frac{p_4(x)}{x^{3/2}} dx = \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{x^{3/2}} dx \quad \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0 \\ \Rightarrow dx = 2tdt \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ x = 1 \Leftrightarrow t = 1 \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2 - \frac{t^6}{3!}}{t^3} 2tdt = \int_0^1 \left(2 - \frac{t^4}{3}\right) dt = \left[2t - \frac{t^5}{15}\right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{1}{15} = \frac{29}{15} \quad (\approx 1.93).$$

(c) Storleken av felet i approximationen i (b) ges av

$$\left|\int_0^1 \frac{R_4(x)}{x^{3/2}}dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{\frac{\cos(\xi)x^5}{5!}}{x^{3/2}}dx\right| \le \frac{\cos(0)}{5!}\int_0^1 \frac{x^5}{x^{3/2}}dx = \frac{1}{120}\int_0^1 \frac{x^5}{x^{3/2}}dx = \frac{1}{60}\int_0^1 t^8 dt$$
$$= \frac{1}{60}\left[\frac{t^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{540} < \frac{1}{500} = 0.002 < 0.005 = 0.5\cdot 10^{-2}$$

där vi utnyttjade samma variabelsubstitution som i (b).

6. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{ då } h\to 0$$

dvs $D(fg) = f'g + fg'$.

(b) Om $y(t)$ är andelen sjuka vid tiden t har vi enligt uppgiften

$$y' = ky(1-y). \tag{3}$$

Sätter vi $t=0$ vid den tidpunkt halva befolkningen var sjuka får vi direkt spridningshastigheten

$$y'(0) = ky(0)(1-y(0)) = k\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4}.$$

Om sjukdomen fortsättningsvis spritts med samma hastighet skulle andra halvan av befolkningen också varit sjuk efter n dagar dvs

$$\frac{k}{4}n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{2}{n}.$$

Differentialekvationen (3) är separabel och har två lösningar som är $y=0$ och $y=1$ men det är uppenbart inte dem vi söker och vi kan därför dividera ekvationen med $y(1-y)$:

$$\frac{1}{y(1-y)}y' = k \Leftrightarrow \int \frac{1}{y(1-y)}dy = \int \frac{1+y-y}{y(1-y)}dy = \int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right)dy = \int k dt$$
$$\Leftrightarrow \ln|y| - \ln|1-y| = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = kt + C$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{kt+C} = e^C e^{kt} \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = \pm e^C e^{kt} = De^{kt}$$
$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{De^{kt}}{De^{kt}+1}$$

där $D = \pm e^C$ är en godtycklig konstant som är skild från 0. Eftersom

$$y(0) = \frac{De^0}{De^0+1} = \frac{D}{D+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow D = 1$$

är den sökta lösningen

$$y(t) = \frac{e^{\frac{2t}{n}}}{e^{\frac{2t}{n}}+1}$$

och efter n dagar är andelen sjuka

$$y(n) = \frac{e^{\frac{2n}{n}}}{e^{\frac{2n}{n}}+1} = \frac{e^2}{e^2+1} \approx 0.88.$$