HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 17 januari 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Härled formeln för partiell integration. (*1p*)

   (b) Beräkna integralen (*2p*)

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx \, .$$

   (c) Beräkna gränsvärdet (*2p*)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + (x-1)\cos x + \ln(1-x)}{\arctan x - \sin x}.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2xe^{-x}, \\ y(0) = y'(0) = -1. \end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

4. (a) Härled derivatan av e^x. (*1p*)

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = \frac{x - xy}{1 + x}$$

   för vilken $y(0) = 2$. (*4p*)

5. (a) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^{3/2}}$$

   är konvergent utan att beräkna den. (*2p*)

   (b) Beräkna den generaliserade integralen i (a). (*3p*)

6. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner. (*1p*)

   (b) När ingenjörsstudenten Pelle skrev tentan i Envariabelanalys var han så nervös att han glömde bort produktregeln. I en uppgift använde han istället $(fg)' = f'g'$. Men trots detta blev resultatet ändå rätt och eftersom läraren rättade slarvigt märkte han inte felet och Pelle fick godkänt på tentan. I Pelles uppgift var $f(x) = e^{x^2}$, $g(1) = e$ och $x > \frac{1}{2}$. Vad var $g(x)$? (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001 Envariabelanalys 6 hp
Fredagen den 17 januari 2020
Skrivtid: 9.00-14.00

Lösningsförslag

1. (a) Om $F'(x) = f(x)$ och $g(x)$ är deriverbar har vi:

$$D(Fg) = F'g + Fg' = fg + Fg' \Leftrightarrow fg = D(Fg) - Fg'$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

(b) Substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0$, ger $dx = 2tdt$. $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$, $x = 4 \Leftrightarrow t = 2$. Integralen beräknas nu enkelt med partiell integration enligt (a):

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^2 e^t t dt = 2\left(\left[e^t t\right]_0^2 - \int_0^2 e^t \cdot 1dt\right) = 2\left[e^t t - e^t\right]_0^2 = 2(2e^2 - e^2 - (e^0 \cdot 0 - e^0))$$
$$= 2(e^2 + 1).$$

(c) Vi börjar med Maclaurinutveckling av nämnaren:

$$\arctan x - \sin x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) = -\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Eftersom den första icke-försvinnande termen i nämnaren är av ordning 3 så utvecklar vi täljaren t.o.m. ordning 3. Pga entydigheten hos Maclaurinutvecklingen får vi ($-x \to 0$ då $x \to 0$):

$$1 + (x-1)\cos x + \ln(1-x) = 1 + (x-1)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) - x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$
$$= -\frac{5x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

Vi får till slut

$$\frac{1 + (x-1)\cos x + \ln(1-x)}{\arctan x - \sin x} = \frac{-\frac{5x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{-\frac{5}{6} + \mathcal{O}(x)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)} \to 5 \text{ då } x \to 0.$$

2. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$\mathcal{L}(y) = y'' + 3y' + 2y = 0$$

och y_p en partikulärlösning till

$$\mathcal{L}(y) = 2xe^{-x}. \tag{1}$$

Lösning till homogena ekvationen: Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 3r + 2 = 0$ har rötterna $r_1 = -2$ och $r_2 = -1$ och den allmänna lösningen till $\mathcal{L}(y) = 0$ är därför

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Partikulärlösning: Eftersom högerledet är ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion inför vi hjälpfunktionen z och gör ansatsen:

$$y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = (z' - z)e^{-x} \Rightarrow y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{x}.$$

Insättning i (1) ger nu

$$y'' + 3y' + 2y = (z'' - 2z' + z + 3(z' - z) + 2z)e^{-x} = (z'' + z')e^{-x} = 2xe^{-x} \Leftrightarrow z'' + z' = 2x \tag{2}$$

Ansatsen $z_p = (ax + b)x = ax^2 + bx \Rightarrow z_p' = 2ax + b \Rightarrow z_p'' = 2a$ insatt i (2) ger nu

$$z'' + z' = 2a + 2ax + b = 2x \Leftrightarrow a = 1,\ b = -2$$

och vi får $y_p = (x^2 - 2x)e^{-x}$. Den allmänna lösningen till (1) är därför

$$y = y_h + y_p = (C_1 + x^2 - 2x)e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Från begynnelsvillkoren får vi

$$\begin{aligned}
y(0) &= C_1 + C_2 = -1 \Leftrightarrow C_1 = -1 - C_2, \\
y'(x) &= (2x-2)e^{-x} - (C_1 + x^2 - 2x)e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} = (-C_1 - x^2 + 4x - 2)e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} \\
\Rightarrow y'(0) &= -C_1 - 2 - 2C_2 = 1 + C_2 - 2 - 2C_2 = -1 - C_2 = -1 \\
&\Leftrightarrow C_1 = -1,\ C_2 = 0.
\end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}.$$

3. Vi bestämmer först eventuella stationära punkter till $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{(3x^2+3)x^2 - (x^3 + 3x + 1)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3} \underset{*}{=} \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -1 \text{ eller } x = 2.
\end{aligned}$$

*Gissning ger t ex roten -1 och faktorn $x+1$. Polynomdivision ger sedan andragradsekvation och de två övriga faktorerna.

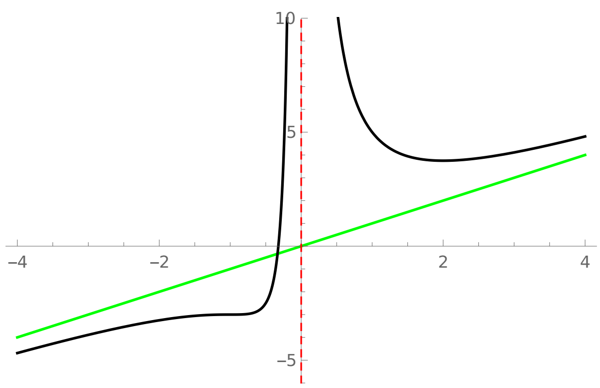
Sedan undersöker vi derivatans tecken och förutom de stationära punkterna tar vi även med punkten $x = 0$ där f och f' inte är definierade:

x		-1		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$*$	$-$	2	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$

Till sist bestämmer vi eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där nämnaren är noll medan täljaren är skild från noll för $x = 0$ har $f(x)$ den lodräta asymptoten $x = 0$. P.g.a. att $f(x)$ är rationell ger en enkel polynomdivision direkt eventuell sned asymptot:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2} = \underbrace{x}_{\text{Sned asymptot}} + \frac{3x+1}{x^2}.$$

Sammanfattning: Funktionen $f(x)$ har en lokal terasspunkt i $x = -1$ med värdet $f(-1) = -3$ samt samt en lokal minimipunkt i $x = 2$ med värdet $f(2) = \frac{15}{4}$. Kurvan $y = f(x)$ har den lodräta asymptoten $x = 0$ samt den sneda asymptoten $y = x$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^2}$.

4. (a) Derivatan av en deriverbar funktion $f(x)$ i en godtycklig punkt x ges av

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = e^x$ får vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} \to e^x \cdot 1 = e^x \text{ då } h \to 0$$

dvs $De^x = e^x$.

(b) Detta är en linjär *och* separabel differentialekvation. Löser vi den som en separabel observerar vi först att $y = 1$ är en lösning. För $y \neq 1$ får vi

$$\begin{aligned}
y' = \frac{x-xy}{1+x} &\Leftrightarrow \frac{1}{1-y}y' = \frac{x}{1+x} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y}dy = \int \frac{x}{1+x}dx = \int \frac{x+1-1}{1+x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx \\
&\Leftrightarrow -\ln|1-y| = x - \ln|1+x| + A \Leftrightarrow |1-y| = e^{\ln|1+x|-x-A} = |1+x|e^{-x}e^{-A} \\
&= B|1+x|e^{-x},\ B > 0 \Leftrightarrow 1-y = \pm B(1+x)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y(x) = 1 + C(1+x)e^{-x}.$$

där C är en godtycklig konstant och $C = 0$ motsvarar fallet $y = 1$ ovan. Betraktar vi istället ekvationen som en linjär differentialekvation får vi

$$y' = \frac{x-xy}{1+x} \Leftrightarrow y' + \frac{x}{1+x}y = \frac{x}{1+x}$$

och multiplikation med den integrerande faktorn

$$e^{G(x)} = e^{\int \frac{x}{1+x}dx} = e^{x-\ln|1+x|} = \frac{e^x}{|1+x|} = \pm\frac{e^x}{1+x} \quad (+ \text{ om } x > -1,\ - \text{ om } x < -1)$$

ger:

$$\begin{aligned}
\pm y'\frac{e^x}{(1+x)} \pm y\frac{e^x x}{(1+x)^2} &= \pm D\left(y\frac{e^x}{1+x}\right) = \pm\frac{xe^x}{(1+x)^2} \\
\Leftrightarrow y\frac{e^x}{1+x} &= \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = xe^x\left(-\frac{1}{1+x}\right) - \int (1+x)e^x\left(-\frac{1}{1+x}\right)dx \\
&= xe^x\left(-\frac{1}{1+x}\right) + e^x + C = e^x\frac{-x+1+x}{1+x} + C = \frac{e^x}{1+x} + C \\
\Leftrightarrow y(x) &= 1 + C(1+x)e^{-x}
\end{aligned}$$

dvs samma lösning som tidigare.
Vi får nu

$$y(0) = 1 + C(1+0)e^0 = 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Den sökta lösningen är alltså $y(x) = 1 + (1+x)e^{-x}$.

5. (a) Vi observerar först att integralen är generaliserad på två sätt och vi gör därför uppdelningen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}}$$

Den generaliserade integralen är konvergent omm båda integralerna i HL är konvergenta.
För $0 < x \leq 1$ är

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+0)^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ är integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}} \quad \text{konvergent.}$$

För $x > 1$ är

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}(0+\sqrt{x})^{3/2}} = \frac{1}{x^{5/4}}.$$

Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha > 1$ är integralen

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}} \quad \text{konvergent.}$$

Eftersom den sökta generaliserade integralen är summan av de båda ovanstående är den därför också konvergent.

(b) Med substitutionen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$, $t \geq 0$, och $dx = 2tdt$ får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}}dx = \int \frac{1}{t(1+t)^{3/2}}2tdt = 2\int \frac{1}{(1+t)^{3/2}} = -\frac{4}{\sqrt{1+t}}+C = -\frac{4}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+C.$$

Uppdelning enligt (a) ger nu:

$$\int_{\epsilon>0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}}dx = -4\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right]_\epsilon^1 = -4\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\epsilon}}}\right) \to 4-2\sqrt{2} \text{ då } \epsilon \to 0,$$

$$\int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}}dx = -4\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right]_1^R = -4\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{R}}} - \frac{1}{\sqrt{1+1}}\right) \to 2\sqrt{2} \text{ då } R \to \infty.$$

Eftersom den generaliserade integralens värde är summan av de båda ovanstående gränsvärdena är

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{3/2}}dx = 4.$$

6. (a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är två deriverbara funktioner så söker vi derivatan av $f(x)g(x)$ och vi får differenskvoten

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{ då } h \to 0\end{aligned}$$

dvs $D(fg) = f'g + fg'$.

(b) Enligt uppgiften har vi

$$\begin{aligned}D(f(x)g(x)) = f'(x)g'(x) &\Leftrightarrow D(e^{x^2}g(x)) = 2xe^{x^2}g(x) + e^{x^2}g'(x) = 2xe^{x^2}g'(x) \\ &\Leftrightarrow g'(x) - \frac{2x}{2x-1}g(x) = 0\end{aligned}$$

som är en linjär homogen differentialekvation av första ordningen. Multiplikation med den integrerande faktorn

$$e^{G(x)} = e^{\int -\frac{2x}{2x-1}dx} = e^{-\int (1+\frac{1}{2x-1})dx} = e^{-(x+\frac{\ln|2x-1|}{2})} \underset{x>\frac{1}{2}}{=} e^{-(x+\frac{\ln(2x-1)}{2})} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x-1}}$$

ger

$$D\left(g(x)\frac{e^{-x}}{\sqrt{2x-1}}\right) = 0 \Leftrightarrow g(x)\frac{e^{-x}}{\sqrt{2x-1}} = C \Leftrightarrow g(x) = Ce^x\sqrt{2x-1}.$$

Eftersom $g(1) = Ce^1\sqrt{2-1} = Ce = e \Leftrightarrow C = 1$ så följer det att

$$g(x) = e^x\sqrt{2x-1}$$

är Pelles funktion.

Anm: Efter omskrivningen $\frac{1}{g}g' = \frac{2x}{2x-1}$ ser vi att differentialekvationen även är separabel och kan lösas som en sådan. Jfr med uppgift 4 som är snarlik.