HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Algebra och diskret matematik
Uppgiftspaket 5
1 oktober 2025

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Lös respektive ekvation eller olikhet:

   (a) $|x-1|-4x=|x+1|$.

   (b) $x^4-3x^3+6x-4=0$.

   (c) $|2x+1|-|x-2|<2x$.

   (d) $\dfrac{3x^3-5x^2-25x+3}{x^2-x-12}\leq 2x$.

2. (a) Funktionerna $f(x)=x^2-3x+4$ och $g(x)=4|x-1|-x$.

   1. Lös ekvationen $f(x-3)=g(2x)$
   2. Bestäm de x för vilka $g(x)>f(x)$

   Kontrollera dina svar genom att rita lämpliga grafer.

   (b) Funktionen $f(x)=x^2-3x-3$ och $y=g(x)$ är en ekvation för den räta linje som går genom punkterna $(-1,f(-1))$ och $(2,f(2))$. Bestäm de x för vilka $g(x)>f(x)$. Kontrollera ditt svar genom att rita kurvan $y=f(x)$ och linjen $y=g(x)$ i samma koordinatsystem.

   (c) Rita funktionen $f(x)=|x^2-4|-x$ och lös därefter olikheten $f(x)>|x-2|-2$.

   (d) Bestäm eventuella asymptoter till kurvan

   1. $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{x-1}$
   2. $y=f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-2}{x^2-4}$
   3. $y=f(x)=\dfrac{x^4-2x^3-2x^2-2x}{x^2-2x-3}$

   samt rita kurvans utseende i närheten av asymptoterna.

3. (a) Beräkna följande summor:

   1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}3^{2k}$ för $n\geq 2$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^{3-k}$ för $n\geq 1$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}-4k+2)$ för $n\geq 0$

   (b) Bankingenjören Kajsa tar ett banklån på 100000kr. Räntan är 4% per år och avbetalningstiden 5 år. Lånet ska betalas månadsvis dvs antal betalningstillfällen är 60. Vad blir Kajsas totalkostnad för lånet om det läggs upp i) med rak amortering, dvs samma summa amorteras varje månad, ii) som annuitetslån dvs samma totalsumma (amortering + ränta) betalas varje månad?
   Härled formler som beräknar totalkostnaden för lånet i de båda fallen samt annuiteten (kostnad per betalningstillfälle) vid annuitetslån, för godtyckliga värden på lånesumman (S), räntan (r), avbetalningstiden (T) och antal betalningstillfällen (n).

   (c) Avgör om följande funktioner är bijektiva och bestäm i så fall inversen:

   1. $f(x)=x\sqrt{2+x^2}$ 2. $f(x)=x|x|+1$ 3. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geq 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$

   Målmängden $B=V_f$ i samtliga fall. OBS! Även $D_{f^{-1}}$ och $V_{f^{-1}}$ skall bestämmas.

   (d) 1. För vilka värden på a, b och c är funktionen $f(x)=(x-a)/(bx-c)$ sin egen invers?
   2. Bestäm samtliga polynom p som uppfyller

   $$p(x)p(y)=p(xy)+x+y$$

   för alla reella tal x och y.

Vänd!

4. (a) Relationen $\mathcal{R}$ på $A = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$ definieras genom

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2.$$

Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation på A?

(b) Relationen $\mathcal{R}$ på $A = \{3, 6, 9, 12, 24, 30, 45\}$ definieras genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y.$$

1. Verifiera att $\mathcal{R}$ är en partiell ordningsrelation.
2. Rita Hassediagram.
3. Ange alla maximala element och alla minimala element.
4. Ange i förekommande fall största och minsta element.

(c) Funktionerna $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definieras enligt: $f(x) = x + 1$ och $g(x) = \max(1, x - 1)$.

1. Bestäm V_f och V_g.
2. Är f eller g surjektiv?
3. är f eller g injektiv?
4. Visa att $g(f(x)) = x$ för alla $x \in \mathbb{Z}^+$
5. Bestäm $f(g(x))$ för $x = 2$, 3, 4, 7, 12 och 25. Är $f(g(x)) = x$ för alla $x \in \mathbb{Z}^+$?

(d) Tävlingsskyttarna Sara och Kalle ska skjuta pistol mot en måltavla. Träffsannolikheten vid varje skott är p för båda skyttarna och olika skott träffar oberoende av varandra. Sara och Kalle startar tävlingen och skjuter en och en i ordningsföljden S, K, S, K,... tills två träffar registrerats. Vad är sannolikheten för det är samma person som träffar båda gångerna?