MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om polynom

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

1 oktober 2025

Polynomfunktioner

Exempel 1

$f(x) = 7x^4 + 3x^3 - x + 5$, $x \in R$, är ett reellt polynom av grad 4.

Definition 1

En funktion av typen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \; a_n \neq 0,$$

kallas en polynomfunktion eller ett polynom av grad n. Vi skriver $\text{grad}(f) = n$. Talen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ kallas polynomets koefficienter.

Polynomfunktioner

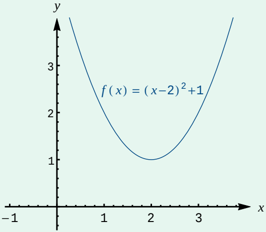
Exempel 2

Bestäm värdemängden och eventuella nollställen till polynomfunktionen $f(x) = x^2 - 4x + 5$ samt rita grafen $y = f(x)$.

Lösning:

Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 \\ &= (x-2)^2 + 1 \geq 1 \end{aligned}$$



$\therefore\ V_f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$ dvs $f(x)$ saknar reella nollställen.

Polynomdivision

Exempel 3

Vi beräknar $47/13$ med ”trappan”:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 13\,\overline{)\,47} \\ \underline{39} \\ 8 \end{array} \quad \Rightarrow \frac{47}{13} = 3 + \frac{8}{13} \Leftrightarrow 47 = 3 \cdot 13 + 8.$$

$\therefore$ Då vi dividerar 47 med 13 blir kvoten 3 och resten 8. Resten blir alltid mindre än det man dividerar med (Divisionsalgoritmen).

Divisionsalgoritmen

Exempel 4

Beräkna kvot och rest då polynomet $f(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 5x - 1$ divideras med polynomet $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

Lösning:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{2x^4 + x^3 + 5x^2 -{}} 2x + 1 \\ \hline
x^3 + 2x - 2 & 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 5x - 1 \\
 & -2x^4 \phantom{{}+ x^3} - 4x^2 + 4x \\ \hline
 & \phantom{2x^4 +{}} x^3 + x^2 - x - 1 \\
 & -x^3 \phantom{{}+ x^2} - 2x + 2 \\ \hline
 & \phantom{2x^4 + x^3 +{}} x^2 - 3x + 1
\end{array}
$$

$$\Rightarrow 2x^4 + 5x^2 - 5x + x^3 - 1 = (x^3 + 2x - 2)\underbrace{(2x + 1)}_{q(x)\ \text{(kvot)}} + \underbrace{x^2 - 3x + 1}_{r(x)\ \text{(rest)}}$$

Sats 1 (Divisionsalgoritmen)

Om f och g är polynom och grad$(f) > $ grad(g) så finns det polynom q (kvot) och r (rest) sådana att $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ där grad$(r) <$ grad(g).

Faktorsatsen

Exempel 5

Bestäm kvot och rest då $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ divideras med $x - 1$.

Lösning:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 4 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\
 & -x^3 + x^2 \\
\hline
 & -4x^2 + 8x \\
 & 4x^2 - 4x \\
\hline
 & 4x - 4 \\
 & -4x + 4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)\underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{q(x)} + \underbrace{0}_{r(x)=0}
$$

- Resten blir noll här eftersom vi dividerade med faktorn $x - 1$ och $x = 1$ är ett nollställe till $f(x)$.
- Polynomdivision i Mathematica:
  `PolynomialQuotientRemainder[x^3-5x^2+8x-4,x-1,x]`

Faktorsatsen

Sats 2 (Faktorsatsen)

Om $f(x)$ är ett polynom så är

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha)$$

där $q(x)$ är ett polynom med grad(q) = grad$(f) - 1$.

Bevis:

1. $(\Rightarrow)$ Dividerar vi $f(x)$ med $x - \alpha$ får vi

   $$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x) \quad (*)$$

   där r enligt divisionsalgoritmen är ett polynom med grad$(r) <$ grad$(x - \alpha)$ = 1 dvs en konstant C.
   $x = \alpha$ i $(*) \Rightarrow 0 = f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + C = C \Rightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha)$.
2. $(\Leftarrow) \quad f(x) = q(x)(x - \alpha) \Rightarrow f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$.

Faktorsatsen

Exempel 6

Lös ekvationen $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

Lösning:

"Gissning" ger roten $x = 1 \Rightarrow x - 1$ är en faktor i $f(x)$ enligt faktorsatsen.
Polynomdivision:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1} = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - x - 2)(x - 1).$$

$$\therefore f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ eller } x = 2.$$

I Mathematica:

- Polynomekvationer: `Solve[x^3-2x^2-x+2==0,x]`
- Faktorisering: `Factor[x^3-2x^2-x+2]`

Geometriska summor

Exempel 7

Pelle sätter in 100 kr på ett bankkonto med räntan 5% i början på varje år. Vad är behållningen efter 6 år?
Pengar på kontot efter år:

$$
\begin{aligned}
1:&\quad 100 \cdot 1.05 \text{ kr}\\
2:&\quad (100 \cdot 1.05 + 100) \cdot 1.05 = 100 \cdot 1.05 + 100 \cdot 1.05^2 \text{ kr}\\
3:&\quad 100 \cdot 1.05 + 100 \cdot 1.05^2 + 100 \cdot 1.05^3 \text{ kr}\\
&\quad \vdots\\
6:&\quad 100 \cdot 1.05 + 100 \cdot 1.05^2 + \cdots + 100 \cdot 1.05^6 \text{ kr}
\end{aligned}
$$

Efter 6 år har alltså Pelle

$$100(1.05 + 1.05^2 + 1.05^3 + \cdots + 1.05^6) = 100 \sum_{k=1}^{6} 1.05^k \quad \text{kr}$$

Geometriska summor

Vi vill beräkna summor av typen

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad x \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Sätt } S &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \Rightarrow xS = x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} = S - 1 + x^{n+1} \\ &\Leftrightarrow S(x-1) = x^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Sats 3 (Geometrisk summa)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

Anm: Kvoten mellan två på varandra följande termer är konstant.

Exempel 7 (forts)

För Pelles del är kvoten 1.05 och behållningen blir

$$100 \sum_{k=1}^{6} 1.05^k = 100 \left(\sum_{k=0}^{6} 1.05^k - 1 \right) = 100 \left(\frac{1.05^7 - 1}{1.05 - 1} - 1 \right) \approx 714 \text{ kr.}$$

Rationella funktioner

Exempel 8

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} \qquad g(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{4x^3 - 6x} \qquad h(x) = \frac{1}{x^3 - 8}$$

Definition 2

Om $p(x)$ och $q(x)$ är polynom så kallas

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \; D_f = \{x \; : \; q(x) \neq 0\}$$

en *rationell funktion*.

Rationella funktioner

Exempel 9

Skissera grafen till

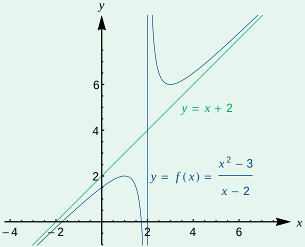
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} \qquad \leftarrow \text{ Rationell funktion}$$

Lösning:

$f(x)$ är inte definierad för $x = 2$. Polynomdivision ger:

$$\frac{x^2 - 3}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x - 2} \to \pm\infty \text{ då } x \to 2^{\pm}.$$

- $y = f(x)$ har en lodrät asymptot $x = 2$.
- $\frac{1}{x-2} \to 0$ då $x \to \pm\infty$
  $\Rightarrow y = f(x)$ närmar sig $y = x + 2$ då $x \to \pm\infty$
  $\Rightarrow$ Kurvan $y = f(x)$ har den sneda asymptoten
  $y = x + 2$ då $x \to \pm\infty$.



Rationella funktioner

Exempel 10

Undersök funktionen

$$f(x) = \frac{3x^4 - 6x^2 - 8x + 3}{x^4 + 6x - 1} \quad \text{då } x \to \infty$$

Lösning:

Dividera täljare och nämnare med x^4 :

$$\frac{3x^4 - 6x^2 - 8x + 3}{x^4 + 6x - 1} = \frac{3 - \frac{6}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{1 + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^4}} \to \frac{3 - 0 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 3 \text{ då } x \to \infty.$$

Vi skriver

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 6x^2 - 8x + 3}{x^4 + 6x - 1} = 3.$$

Anm: Gränsvärdesbeteckningen $\lim\limits_{x\to\infty}$ utläses ”limes då x går mot oändligheten”

Rationella funktioner

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 11

Lös olikheten

$$\frac{x^2 - x - 11}{x - 3} > 1.$$

Lösning:

$$\frac{x^2 - x - 11}{x - 3} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 11}{x - 3} - 1 = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 3} = \underbrace{\frac{(x+2)(x-4)}{x-3}}_{f(x)} > 0$$

Teckenstudium:

x		-2		3		4	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$*$	$-$	0	$+$

$\therefore -2 < x < 3$ eller $x > 4$.

Olikheter i Mathematica: `Reduce[(x^2-x-11)/(x-3)>1,x]`