# MA2047 Algebra och diskret matematik

## Något om grafer

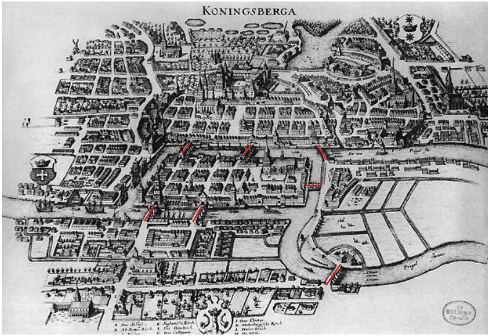
Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

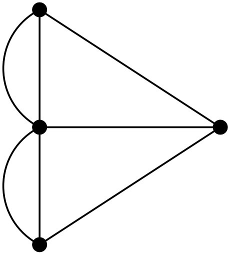
24 september 2025

# Broarna i Königsberg

De sju broarna i Königsberg (nuvarande Kaliningrad) på 1700-talet:




(a) Königsberg 1652



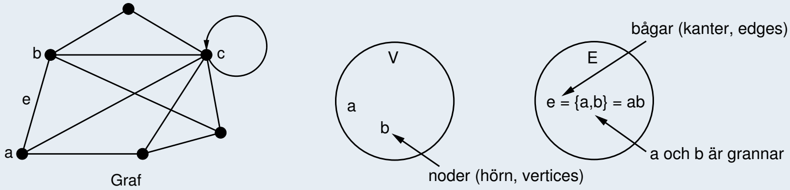
(b) Graf

- *Problem:* Finns det en sluten väg genom staden sådan att samtliga broar passeras endast en gång?
- Leonhard Euler (1707-1783) publicerade en lösning på problemet 1736. Detta betraktas som grafteorins födelse.

# Terminologi och definitioner

## Definition 1

En graf $G$ är ett ordnat par av mängder $G = (V, E)$.

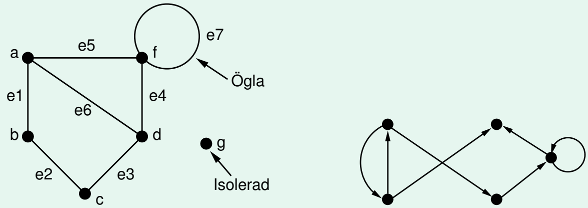



- Bågen $e = \{a, b\} = ab$ är incident med $a$ och $b$ som kallas ändpunkter.
- Bågen $cc$ kallas en ögla.

*Anm:* Om man tillåter att ett nodpar förbinds med flera bågar används termen multigraf.

# Terminologi och definitioner

## Exempel 1




(a) Graf (b) Riktad graf

- $e_1, e_2, \ldots, e_7$ bågar
- $a, b, c, d, f, g$ noder
- $e_7$ ögla

*Anm:* I en riktad graf är varje båge försedd med en orientering. Beteckningen graf används här för oriktade grafer.

# Terminologi och definitioner

## Definition 2

För en graf $G$ gäller följande:

- Om $a$ och $b$ är noder så är:
  - $a = a_0, e_1, a_1, e_2, a_2, ..., a_{n-1}, e_n, a_n = b$, $e_i = a_{i-1}a_i$, en väg från $a$ till $b$.
  - $n =$ vägens längd (= antal bågar).
- Om $a = b$ är vägen sluten och kallas en cykel.
- Om $a \neq b$ är vägen öppen.
- En väg som passerar varje nod högst en gång kallas enkel.
- Längden av den kortaste vägen mellan $a$ och $b$ kallas avståndet.

# Terminologi och definitioner

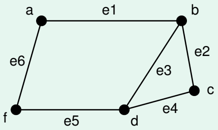
## Definition 3

En graf $G$ är:

- Sammanhängande om två godtyckliga noder kan förbindas med en väg.
- Planär om den kan ritas i ett plan utan att några bågar skär varandra.
- Komplett (fullständig) om den är öglefri och det finns en båge mellan varje par av noder. En komplett graf med $n$ noder betecknas $K_n$.
- Ett träd om den är sammanhängande och saknar cykler.

# Terminologi och definitioner

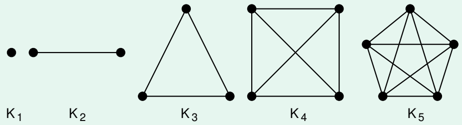
## Exempel 2



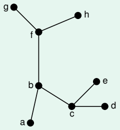

Sammanhängande planär graf

- $e_1, e_2$ öppen enkel väg från $a$ till $c$, längd $n = 2$.
- $e_1, e_3, e_5, e_6$ cykel eller sluten väg
- $e_1, e_2, e_4, e_3, e_2$ är ej enkel
- $G$ är sammanhängande och planär men ej komplett.

## Exempel 3




(a) De kompletta graferna $K_1, \ldots, K_5$




(b) Träd

# Terminologi och definitioner

## Definition 4

Om $v$ är en nod i grafen $G$ så är graden (valensen) av $v$

$$\deg(v) = \text{Antal bågar som har ändpunkt i } v$$

## Exempel 4

$G = (V, E)$. Bestäm $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

- Varje båge $e = ab$ i $E$ ger bidraget 1 till $\deg(a)$ och bidraget 1 till $\deg(b)$ dvs bidraget 2 till $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

## Sats 1

*Om $G = (V, E)$ så är $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.*

# Terminologi och definitioner

## Exempel 5

På en fest där folk hälsar på varandra är antalet personer som hälsat ett udda antal gånger jämnt. Varför?

- $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$
- $\Rightarrow$ Antalet noder med udda grad är jämnt. (The handshaking lemma.)

## Exempel 6

Bestäm $|V|$ om $G = (V, E)$ är öglefri, har 18 bågar och alla noder har grad 3.

*Lösning:* Sätt $n =$ antal noder

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum_{v \in V} \deg(v) = 3n = 2|E| = 2 \cdot 18 = 36 \\ &\Leftrightarrow \quad n = \frac{36}{3} = 12 \end{aligned}$$

# Terminologi och definitioner

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

## Exempel 7 (T160816, uppg 6a, 2p)

Grafen $G = (V, E)$ är sammanhängande och varje nod har grad 5. Dessutom gäller det att $|E| = 4|V| - 18$. Bestäm $|V|$ och $|E|$.

*Lösning:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = |V| \cdot 5 = 2|E| = 2(4|V| - 18) \Leftrightarrow 3|V| = 36$$

$\therefore |V| = 12$ och $|E| = 30$.

## Exempel 8 (T150109, uppg 3a, 2p)

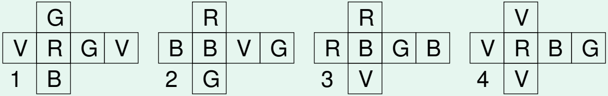
Grafen G har 9 bågar. 3 av noderna har grad 3 och 2 av noderna har grad 4. Hur många noder har grad 1?

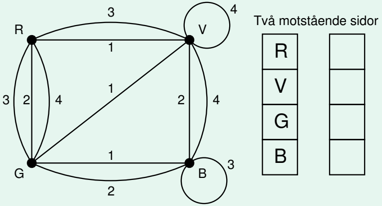
*Lösning:* Sätt $n =$ antal noder med grad 1:

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + n \cdot 1 = 2|E| = 2 \cdot 9 \Leftrightarrow n = 1.$$

## Exempel 9 (Instant insanity)

Stapla de fyra kuberna på varandra så att varje sida i stapeln innehåller alla fyra färgerna. Är det möjligt med nedanstående kuber?




- Två motstående sidor i pelaren motsvarar 4 bågar med olika nummer.
- Alla 4 färgerna finns på båda sidorna ⇔ Varje nod är ändpunkt 2 ggr.

*Anm:* Det finns 41472 olika konfigurationer och endast två ger en lösning. Att testa sig fram är alltså ingen jättebra idé...

# Terminologi och definitioner

## Exempel 9 (Instant insanity forts)

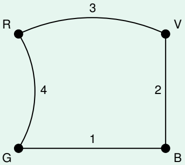
$\therefore$ De 4 bågarna bildar en delgraf som:

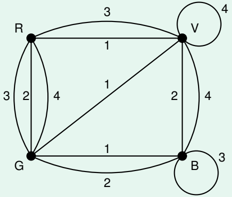
- En cykel genom alla fyra noderna
- En cykel genom 3 av noderna, en ögla i den 4:e
- En cykel genom 2 av noderna, öglor i de 2 andra
- En cykel genom 2 av noderna, en cykel genom de 2 andra
- En ögla i varje nod

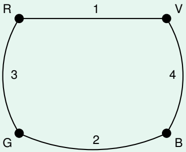
Finns en sådan för just dessa kuber?

# Terminologi och definitioner

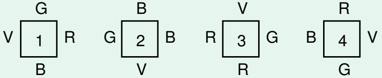
## Exempel 9 (Instant insanity forts)




- Kan vi hitta ytterligare en likadan delgraf som motsvarar de andra paret sidor i pelaren är problemet löst.
- Lösning:



# Grannmatris

Hur kan man representera en graf i en dator?

**Definition 5**

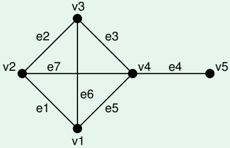
Om $G$ är en öglefri graf med $n$ noder och $e$ bågar så är Grannmatrisen till $G$ $n \times n$ matrisen $X = (x_{ij})$ där

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ om det finns en båge mellan nod } i \text{ och nod } j \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

# Grannmatris

## Exempel 10

Bestäm Grannmatrisen $X$ till grafen




$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Allmänt

Grannmatrisen $X$:

- Är symmetrisk.
- $x_{ii} = 1 \Leftrightarrow$ ögla vid nod $i$
- Öglefri graf $\Rightarrow$ Antal 1:or i en rad eller kolonn = graden av motsv nod.

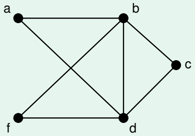
# Eulergrafer

## Definition 6

- En väg som passerar varje båge i en graf precis en gång kallas en Eulerväg.
- En cykel som passerar varje båge i en graf precis en gång kallas en Eulercykel.
- En graf som innehåller en Eulercykel kallas en Eulergraf.

## Exempel 11

Är $G$ en Eulergraf?



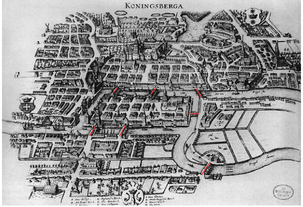

*abcdfbda* är en Eulercykel
$\Rightarrow$ $G$ är en Eulergraf

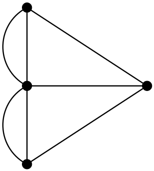
# Eulergrafer

**Sats 2 (Euler-Hierholzer's sats)**

*En sammanhängande graf G innehåller en Eulercykel omm varje nod har jämnt gradtal.*

De sju broarna i Königsberg: Finns Eulercykel?



← Fyra noder av udda grad

Enligt Euler-Hierholzer's sats finns ingen Eulercykel.

# Eulergrafer

## Exempel 12 (T171024, uppg 4a, 2p)

Grafen $G$ är sammanhängande och har 9 bågar. Tre av noderna har grad 2 och två har grad 4. De resterande noderna är färre än fyra och har samma grad.

a. Är $G$ en Eulergraf?
b. Är det möjligt att rita en graf med 9 noder där alla noder har grad 3?

*Lösning:*

a. Handskakningslemmat:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + n \cdot g = 2 \cdot 9 \Leftrightarrow ng = 4$$

$$ng = 4 \text{ och } n < 4 \Rightarrow (n, g) = (1, 4) \text{ eller } (n, g) = (2, 2)$$

*Euler-Hierholzers sats:* $G$ är en Eulergraf eftersom den är sammanhängande och alla noder har jämnt gradtal.

b. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 9 \cdot 3 = 27 \neq 2|E|$

$\therefore$ Nej, det går inte.

*Anm:* I en graf är alltid antalet noder med udda grad jämnt.

# Eulergrafer

## Exempel 13 (T191028, uppg 5b, 2p)

Grafen $G$ är sammanhängande och har 11 bågar. Tre av noderna har grad 4 och tre av noderna har grad 2. Kan man med denna information dra slutsatsen att $G$ är en Eulergraf?

*Lösning:*

a. Sätt $s =$ summan av de resterande nodernas gradtal.
Handskakningslemmat:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + s = 2 \cdot 11 \Leftrightarrow s = 4$$

Vi utnyttjar Euler-Hierholzers sats igen:
Eftersom $s = 4$ är det möjligt att det resterande antalet noder är 4 och deras gradtal 1 som är udda.

$\therefore$ Nej, det går inte.

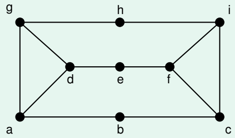
# Hamiltongrafer

## Definition 7

- En väg som passerar varje nod i en graf precis en gång kallas en Hamiltonväg.
- En cykel som passerar varje nod i en graf precis en gång kallas en Hamiltoncykel.
- En graf som innehåller en Hamiltoncykel kallas en Hamiltongraf.

## Exempel 14

Ge exempel på en Hamiltonväg i *G*.



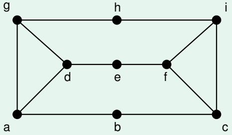

*abcfedghi* är en Hamiltonväg.

# Hamiltongrafer



## Exempel 14 (Forts)

Är $G$ en Hamiltongraf?




- Finns Hamiltoncykel?
- Cykeln måste gå genom varje nod
  $\Rightarrow$ Det spelar ingen roll var vi börjar.

$$b \to c \to \begin{cases} i \to \begin{cases} h \to g \to \text{... omöjlig situation när vi når } f \\ f \to e \to \text{... omöjlig situation när vi når } h \end{cases} \\ f \to \begin{cases} i \to h \to \text{... omöjlig situation när vi når } e \\ e \to d \to \text{... omöjlig situation när vi når } i \end{cases} \end{cases}$$

$\therefore$ Ej hamiltiongraf

# Hamiltongrafer

Det finns inget generellt sätt (än) att avgöra om en graf är en Hamiltongraf. Däremot finns det vissa kriterier som kan användas:

**Sats 3 (Ore's sats)**

*$G$ öglefri graf med $n \geq 3$ noder. Om det för varje par av noder $x, y$ (som inte är grannar) gäller att*

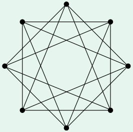
$$\deg(x) + \deg(y) \geq n$$

*så har $G$ en Hamiltoncykel.*

Anm: Omvändningen gäller inte! Om $G$ är en Hamiltongraf är det inte säkert att $deg(x) + deg(y) \geq n$ för varje par av noder som inte är grannar.

**Exempel 15**

Är grafen $G$ en Hamiltongraf?



$n = 8$, $\deg(x) = 4$
$\Rightarrow$ $G$ har Hamiltoncykel
$\Rightarrow$ $G$ är en Hamiltongraf

# Hamiltongrafer

## *The Travelling Salesperson Problem (TSP)*

Givet en lista med städer:

*Vilken är den kortast möjliga vägen som startar i en stad, passerar varje annan stad exakt en gång och sedan återvänder till den ursprungliga staden?*

- Problemets ursprung är oklart men förekommer i en handbok för handelsresande från 1832.
- TSP formulerades och studerades matematiskt först på 1930-talet av Merrill M. Flood i ett försök att hitta ett ruttsystem för skolbussar.
- TSP är ett av de mest studerade problemen inom optimering.
- Algoritmen som snabbast löser problemet exakt har tidskomplexitet $\mathcal{O}(n^2 2^n)$.
- Rekordet (2006) för antalet noder för vilka problemet är löst är 85 900[1]. Tidsåtgång: 136 CPU-år.
- Problemet är löst för Sveriges 24978 orter. Den som ska passera samtliga orter måste åka 72500 km.

[1] Applegate, D. L., Bixby, R. M., Chvátal, V., Cook, W. J. (2006), *The Traveling Salesman Problem*

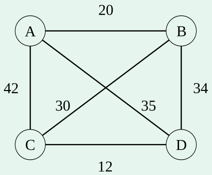
# Hamiltongrafer

## *The Travelling Salesperson Problem (TSP)*

Ett TSP-problem kan modelleras med en oriktad viktad graf $G$:

*Bestäm en Hamiltoncykel med minst vikt.*

### Exempel 16




Hamiltoncykeln *ABCDA* i grafen $G$ har vikten $20 + 30 + 12 + 35 = 97$
Finns det någon Hamiltoncykel i $G$ som har mindre vikt?

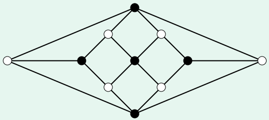
# Kromatiska tal och kromatiska polynom

## Definition 8

- Färgning av en graf $G$ betyder att noderna färgas så att angränsande noder har olika färg.
- $\chi(G) =$ Det minsta antalet färger som krävs för att färga $G$ kallas det kromatiska talet för $G$.
- $P_G(\lambda) =$ Antalet sätt att färga $G$ med högst $\lambda$ färger kallas det kromatiska polynomet för $G$.

*Anm:* $\chi(G) =$ det minsta $\lambda$ för vilket $P_G(\lambda) \neq 0$.

## Exempel 17

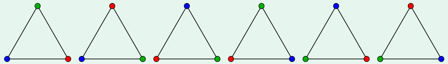


Det kromatiska talet för grafen är $\chi(G) = 2$.

# Kromatiska tal och kromatiska polynom

## Exempel 18

Den triangulära (och kompletta) grafen $K_3$:



$$
\begin{aligned}
P_{K_3}(0) &= P_{K_3}(1) = P_{K_3}(2) = 0\\
P_{K_3}(3) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\\
P_{K_3}(4) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24\\
&\vdots\\
P_{K_3}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda\\
\therefore \chi(G) &= 3
\end{aligned}
$$

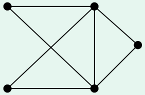
## Allmänt

Det kromatiska polynomet för den kompletta grafen $K_n$ är

$$P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-(n-1))$$

# Kromatiska tal och kromatiska polynom

## Exempel 19 (T141030, uppg 6a, 2p)



Bestäm det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ och det kromatiska talet $\chi(G)$ till grafen G. Innehåller G någon Eulercykel?

*Lösning:* $P_G(\lambda) =$ antalet sätt att färga $G$ med $\lambda$ färger.

- För att optimera detta antal börjar vi färga en av de två noderna i mitten: Har vi $\lambda$ färger kan den färgas på $\lambda$ olika sätt.
- Den andra mitt-noden kan då färgas på $\lambda - 1$ olika sätt.
- De resterande tre noderna kan nu färgas på vardera $\lambda - 2$ olika sätt.

$$\text{Multiplikationsprincipen} \Rightarrow P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$$

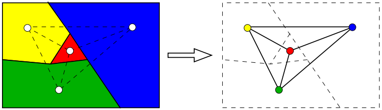
- $P_G(0) = P_G(1) = P_G(2) = 0$ och $P_G(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \neq 0 \Rightarrow \chi(G) = 3$.
- Grafen $G$ är sammanhängande och alla noder har jämn grad: Euler-Hierholzers sats $\Rightarrow$ $G$ har en Eulercykel. (Vi svarade på detta i Ex 11!)

# Fyrfärgsproblemet

*Är det möjligt att med endast 4 färger måla en plan karta så att alla länder med gemensam gräns får olika färg?*


Problemet kan överföras på planära grafer:

*Kan varje planär graf färgas med 4 färger?*



**Sats 4 (The four color theorem, Kenneth Appel & Wolfgang Haken 1976)**

*Om $G$ är en planär graf är $\chi(G) \leq 4$.*

*Anm:* Satsen formulerades av Francis Guthrie redan 1852. Appel & Haken reducerade problemet till 1936 olika fall som sedan kontrollerades mha dator.