MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om differensekvationer

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

10 september 2025

Differensekvationer

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 1

En talföljd $\{y_n\}$ uppfyller

$$\begin{cases} y_{n+1} - 2y_n = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

Bestäm en formel för y_n.

$y_{n+1} = 2y_n$

$\Rightarrow \{y_n\} = \{y_0, y_1, y_2, y_3, ...\} = \{3, 6, 12, 24, ...\} = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, ...\}$

$$\therefore y_n = 3 \cdot 2^n$$

Test för $n = 3$: $y_3 = 3 \cdot 2^3 = 24$ OK!

Allmänt:

Differensekvationen $y_{n+1} + ay_n = 0$ har den allmänna lösningen $y_n = y_0(-a)^n$

Anm: Differensekvationer kallas också rekurrensekvationer.

Differensekvationer

Exempel 2 (Komplexitet för binär sökning)

- $N_n =$ Antal element i en ordnad lista som kan genomsökas med högst n tester

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{n+1} = 2N_n \\ N_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_{n+1} - 2N_n = 0 \\ N_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow N_n = C \cdot 2^n$$

$N_1 = C \cdot 2^1 = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow N_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$

$\Leftrightarrow n - 1 = \log_2 N_n \Leftrightarrow n = \log_2(N_n) + 1$

Komplexiteten för binär sökning = $\mathcal{O}(\log N)$

- Telefonkatalog med 1 miljon namn $\Rightarrow n = 19.93... + 1$
  $\therefore$ högst 21 tester krävs!

Differensekvationer

Exempel 3

En talföljd $\{y_n\}$ uppfyller

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2\sqrt{y_n} \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

$\{y_n\} = \{1, 2, 2 \cdot \sqrt{2}, 2 \cdot 2^{3/4}, 2 \cdot 2^{7/8}, 2 \cdot 2^{15/16}, 2 \cdot 2^{31/32}, 2 \cdot 2^{63/64}, 2\ 2^{127/128}, ...\}$
$\Rightarrow y_n = ?$

$$\text{Mathematica: } y_n = 4^{1-2^{-n}}$$

Linjära differensekvationer

Definition 1

En differensekvation är *linjär* om den kan skrivas på formen

$$\mathcal{L}(x_n) = h_n \tag{1}$$

där $\mathcal{L}$ är en operator på talföljden $\{x_n\}$ med egenskapen

$$\mathcal{L}(ax_n + by_n) = a\mathcal{L}(x_n) + b\mathcal{L}(y_n) \qquad a, b \text{ konstanter}$$

(1) kallas *homogen* om $h_n = 0$ annars *inhomogen*.

Av definitionen följer:

- Om x_n och y_n är två lösningar till en linjär differensekvation så är också $ax_n + by_n$ en lösning för alla tal a och b.
- Ex 1: $y_{n+1} = 2y_n$ är linjär.
- Ex 3: $y_{n+1} = 2\sqrt{y_n}$ är icke-linjär.

Linjära differensekvationer

Exempel 4

- $x_{n+1} + 2nx_n = 2^n$ 1:a ordn, linjär och inhomogen
- $x_{n+2} + n^2 x_{n+1} - 3x_n = 0$ 2:a ord, linjär, homogen
- $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 4x_{n+1} - 2x_n = 3^n + 2n$ 3:dje ordn, linjär, inhomogen
- $x_{n+2} + x_{n+1}^2 - 3x_n = 0$ 2:a ordn, icke-linjär

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 5

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0, \\ y_0 = 1, \ y_1 = 0. \end{cases}$$

- Vi söker alla lösningar dvs den allmänna lösningen till differensekvationen:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0, \quad p, q \text{ godtyckliga konstanter} \tag{2}$$

- Motsvarande 1:a ordningens ekvation $y_{n+1} + ay_n = 0$ hade den allmänna lösningen $y_n = C(-a)^n$
- Vi testar därför om $y_n = Cr^n$, är en lösning till (2)

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Insättning av $y_n = Cr^n$ i (2):

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = Cr^{n+2} + pCr^{n+1} + qCr^n = Cr^n(r^2 + pr + q) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_n = Cr^n = 0 \Leftrightarrow C = 0 \\ \text{eller} \\ r^2 + pr + q = 0 \qquad \leftarrow \text{Karakteristisk ekvation} \end{cases}$$

Anm: En linjär homogen differensekvation har alltid en trivial lösning $y_n = 0$.

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Man kan visa:

Sats 1

Den homogena differensekvationen $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$ *har den allmänna lösningen*

$$y_n = \begin{cases} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 n + C_2) r_1^n, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

där r_1 *och* r_2 *är rötter till den karaktäristiska ekvationen* $r^2 + pr + q = 0$ *och* C_1 *och* C_2 *godtyckliga konstanter.*

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 1 (forts)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Sats 1

$$y_n = \begin{cases} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 n + C_2) r_1^n, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

- Karaktäristisk ekvation: $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 2$
- Allmän lösning enligt Sats 1: $y_n = (C_1 n + C_2)2^n$
- $y_0 = 1 \Rightarrow (C_1 \cdot 0 + C_2)2^0 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$
- $y_1 = 0 \Rightarrow (C_1 \cdot 1 + C_2)2^1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -1$

$\therefore$ Den sökta lösningen är $y_n = (1-n)2^n$.

Homogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 2

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0 \\ y_0 = 0,\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Sats 1

$$y_n = \begin{cases} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 n + C_2) r_1^n, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

- Karaktäristisk ekvation: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$
- Allmän lösning enligt Sats 1: $y_n = C_1 1^n + C_2 2^n = C_1 + C_2 2^n$
- $y_0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 2^0 = C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$
- $y_1 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 2^1 = -C_2 + 2C_2 = C_2 = 1$

$\therefore$ Den sökta lösningen är $y_n = 2^n - 1$.

Mer om linjära differensekvationer

Sats 2

$\mathcal{L}(x_n) = h_n \text{ och } \mathcal{L}(y_n) = g_n \Rightarrow \mathcal{L}(x_n + y_n) = h_n + g_n$

Sats 3

Om y_{pn} är en lösning till

$$\mathcal{L}(y_n) = h_n \tag{3}$$

(partikulärlösning) så ges den allmänna lösningen till (3) *av* $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ *där* y_{hn} *är den allmänna lösningen till* $\mathcal{L}(y_n) = 0$.

Exempel 3

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = x_n \\ y_0 = 1, \ y_1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

då a) $x_n = 2 \cdot 3^n$ b) $x_n = 2 \cdot 2^n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 3 (a)

1. $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$ enligt Ex 2
2. Ansats: $y_{pn} = A3^n$. Insättning i (4):

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= A3^{n+2} - 3A3^{n+1} + 2A3^n = A3^n(9 - 9 + 2) \\ &= 2A3^n = 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow A = 1. \end{aligned}$$

   $\therefore y_{pn} = 3^n$.
3. Allmän lösning enligt Sats 2: $y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 + C_2 2^n + 3^n$
4. $y_0 = C_1 + C_2 2^0 + 3^0 = C_1 + C_2 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$
   $y_1 = C_1 + C_2 2^1 + 3^1 = C_1 + 2C_2 + 3 = -C_2 + 2C_2 + 3 = C_2 + 3 = 0$
   $\Leftrightarrow C_1 = 3, C_2 = -3$
   $\therefore$ Den sökta lösningen är $y_n = 3 - 3 \cdot 2^n + 3^n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 3 (b)

Samma metod som i (a) men ansatsen $y_{pn} = A2^n$ ingår nu i y_{hn} (är lösning till homogena ekvationen) och fungerar inte.
Ny ansats: $y_{pn} = An2^n$.

- Insättning i (4):

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= A(n+2)2^{n+2} - 3A(n+1)2^{n+1} + 2An2^n \\ &= A2^n((4-6+2)n + 8 - 6) = 2A2^n = 2 \cdot 2^n \\ &\Leftrightarrow A = 1. \end{aligned}$$

  $\therefore y_{pn} = n2^n$.

- Allmän lösning enligt Sats 2: $y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 + C_2 2^n + n2^n$
- $y_0 = C_1 + C_2 2^0 + 0 \cdot 2^0 = C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1 - C_2$
  $y_1 = C_1 + C_2 2^1 + 1 \cdot 2^1 = C_1 + 2C_2 + 2 = 1 - C_2 + 2C_2 + 2 = C_2 + 3 = 0$
  $\Leftrightarrow C_1 = 4, C_2 = -3$
  $\therefore$ Den sökta lösningen är $y_n = 4 + (n-3)2^n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 4

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2n + 1 \\ y_0 = 1, \ y_1 = 1 \end{cases}$$

Svar: $y_n = n + 2 - 2^n$

Exempel 5

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 4n + 4 \\ y_0 = 1, \ y_1 = 0 \end{cases}$$

Svar: $y_n = 3^n - n^2 - 2n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Exempel 6

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2 \cdot 3^n - 2n \\ y_0 = 0, \ \ y_1 = 1 \end{cases}$$

- Enligt Sats 2 är $y_n = y_{hn} + y_{p_1 n} + y_{p_2 n}$ allmän lösning till

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2 \cdot 3^n - 2n$$

  där $y_{p_1 n}$ och $y_{p_2 n}$ är partikulärlösningar till $\mathcal{L}(y_n) = 2 \cdot 3^n$ resp. $\mathcal{L}(y_n) = -2n$
- Enligt Ex 3 är $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$ och $y_{p_1 n} = 3^n$
- Eftersom y_{hn} innehåller konstantterm (C_1) fungerar inte ansatsen $y_{p_2 n} = an + b$. Ansatsen $y_{p_2 n} = n(an + b) = an^2 + bn$ ger efter insättning i $\mathcal{L}(y_n) = -2n$ konstanterna $a = b = 1$
- Bestämning av C_1 och C_2 med hjälp av givna värden på y_0 och y_1 ger den sökta lösningen $y_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 3^n + n^2 + n$

Inhomogena linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Sammanfattning

Partikulärlösning y_{pn} till

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = h_n$$

1. $h_n = Ca^n$:
   - $y_{pn} = Aa^n$ om inte y_{hn} innehåller sådan term
   - $y_{pn} = Ana^n$ om $y_{hn} = C_1 a^n + C_2 b^n$
   - $y_{pn} = An^2 a^n$ om $y_{hn} = (C_1 n + C_2)a^n$
2. $h_n =$ polynom:
   - $y_{pn} =$ polynom $p(n)$ av samma grad som h_n om inte y_{hn} innehåller konst. term C
   - $y_{pn} = np(n)$ om y_{hn} innehåller konstantterm C men inte Cn
   - $y_{pn} = n^2 p(n)$ om $y_{hn} = C_1 n + C_2$
3. $h_n = f_n + g_n$: Använd sats 2

Exempel: Rekursiv algoritm för sortering

Exempel 7 (Bubble sort)

Bestäm effektiviteten = # jämförelser (y_n) som krävs för att sortera en lista

$$\{t_1, t_2, t_3, ..., t_n\} \qquad (\text{Ex: } \{3, 5, 1, 6, 4\},\ n = 5)$$

av n st reella tal i storleksordning mha ”Bubble sort”.
Rekursiv metod:

- Jfr t_1 med t_2: $t_1 > t_2$ byt plats, $t_1 < t_2$ gör inget
- Jfr (ev nya) t_2 med t_3: $t_2 > t_3$ byt plats, $t_2 < t_3$ gör inget

  $\vdots$
- Resultat: Totalt $n - 1$ jämförelser $\Rightarrow$ Största talet längst till höger.
- Börja om med listan $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_{n-1}\} \leftarrow$ nya värden.
  Ex: $\{3, 5, 1, 6, 4\}$. En runda ger $\{3, 1, 5, 4, 6\}$. Börja om med $\{3, 1, 5, 4\}$

Exempel: Rekursiv algoritm för sortering

Exempel 7 (Bubble sort forts)

Rekursionsformel:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + n - 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_n - y_{n-1} = n - 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

- $y_{hn} = C \cdot 1^n = C$ enligt tidigare
- Partikulärlösning: Ansats $y_{pn} = an^2 + bn$ eftersom y_{hn} innehåller C
- Allmän lösning: $y_n = y_{hn} + y_{pn} = C + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$. Villkoret $y_1 = 0$ ger $C = 0$.

$$\therefore\ y_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Anm: Totala antalet jämförelser:

$$y_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n - 1 = \{\text{Aritmetisk summa}\} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ Stämmer!}$$

Differensekvationer i Mathematica

Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2 \cdot 3^n \\ y_0 = 0, \ y_1 = 1 \end{cases}$$

- Lösning till homogena ekv:
  `RSolve[y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]==0,y[n],n]`
- Allmän lösning:
  `RSolve[y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]==2*3^n,y[n],n]`
- Sökt lösning:
  `RSolve[{y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]==2*3^n,y[0]==0,y[1]==1},y[n],n]`