HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Onsdagen den 28 oktober 2026
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös olikheten (*2p*)

$$\frac{x^3+x^2+x}{x-1} \geq x\,.$$

   (b) Lös ekvationen (*3p*)

$$2\sin^3 x = \sin x.$$

2. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*2p*)

$$A:\ |x-3|+1 \geq x, \qquad B:\ x^2<4, \qquad C:\ e^{x-2}<1.$$

   (b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n = 2^{n+2}, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 5. \end{cases}$$

3. (a) Hur många olika ”ord” med 12 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTEAPPARAT”

   om varje bokstav ska användas en gång och om:
   1) alla ord ska börja med med ”MATA” ? (*1p*)
   2) orden inte får börja med ”MATA” och inte sluta med ”APA”? (*1p*)

   Svaren får vid behov innehålla fakulteter.

   (b) Visa att

$$\sum_{k=2}^{n} 3k(k-1) = 6+18+36+\cdots+3n(n-1) = (n-1)n(n+1)$$

   för alla heltal $n \geq 2$. (*3p*)

4. (a) Skriv talen

$$z_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

   på polär form och talen $z_{1,2}^3$ på rektangulär form. (*2p*)

   (b) Ekvationen

$$z^5+z^3-8z^2-8=0$$

   har roten i. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

5. (a) Eulergrafen G har 11 bågar. Fyra av noderna har grad 2 och två av noderna har grad 4. De resterande noderna är fler än en och har alla samma grad. Hur många noder har G? Rita en graf med dessa egenskaper. (*2p*)

   (b) I början av 80-talet skulle elektroingenjören Kajsa bygga en helt egen dator och en dag var hon i elektronikaffären och köpte transistorer och resistorer för totalt 75 kr. Transistorerna kostade 5.50 kr/st, resistorerna 3.50 kr/st och färre än hälften av komponenterna var transistorer. Hur många transistorer köpte hon? (*3p*)

6. (a) Formulera och bevisa Faktorsatsen. (*1p*)

   (b) Ingenjörsstudenten Sara vill lura sin elake mattelärare Kalle på pengar genom att utnyttja hans bristande kunskaper i sannolikhetslära. Sara har funderat ut en tävling som går till så här: Hon fördelar tio röda och tio svarta kulor i två likadana burkar utan att avslöja hur. Kalle ska sedan välja en burk och plocka upp en kula på måfå. Om kulan är röd vinner Sara 100 kr. Om kulan är svart, eller om burken är tom, förlorar Sara och måste betala 100 kr till Kalle.
   1) Vad är sannolikheten för att Sara vinner om hon placerar alla kulorna i en burk? (*1p*)
   2) Hur ska Sara fördela kulorna mellan burkarna för att optimera sina chanser att vinna? (*3p*)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3+x^2+x}{x-1}-x=\frac{x^3+x^2+x-x(x-1)}{x-1}=\frac{x^3+2x}{x-1}=\frac{x(x^2+2)}{x-1}\geq 0.$$

Faktorn $x^2+2>0$ påverkar inte tecknet och behöver inte tas med i teckenstudiet.

x		0		1	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x^2+2)}{x-1}$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

$\Rightarrow \quad \frac{x^3+x^2+x}{x-1}\geq x \Leftrightarrow x\leq 0$ eller $x>1$.

(b) Faktorisering ger direkt

$$2\sin^3 x=\sin x \Leftrightarrow \sin x(2\sin^2 x-1)=\sin x(\sqrt{2}\sin x+1)(\sqrt{2}\sin x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x=0 \text{ eller } \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=n\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{4}+n2\pi \text{ eller } x=\pm\frac{3\pi}{4}+n2\pi.$$

2. (a) Vi har

$$A:|x-3|=\begin{cases}x-3,\ x\geq 3\\ -(x-3)=3-x,\ x<3\end{cases} \quad \Rightarrow$$

x	$x<3$	3	$x\geq 3$
	$\lvert x-3\rvert+1\geq x$		$\lvert x-3\rvert+1\geq x$
	$\Leftrightarrow 3-x+1\geq x$		$\Leftrightarrow x-3+1\geq x$
	$\Leftrightarrow x\leq 2$		$\Leftrightarrow 2\leq 0$
			Saknar lösning!

$\Leftrightarrow x\leq 2$,

$B:x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$,

$C:e^{x-2}<1 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$,

och inser att de implikationer som gäller är: $B\Rightarrow A,\ B\Rightarrow C$ och $C\Rightarrow A$.

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n)=y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=2^{n+2}=4\cdot 2^n \tag{1}$$

ges av $y_n=y_{hn}+y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n)=0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2-3r+2=0$ är $r_1=1$ och $r_2=2$ vilket ger

$$y_{hn}=C_1+C_2 2^n.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom y_{hn} innehåller termen $C_2 2^n$ fungerar inte standardansatsen $A2^n$ och vi gör därför istället ansatsen $y_{pn}=An2^n$ och insättning ger:

$$\begin{aligned}y_{n+2}-3y_{n+1}+4y_n &= A(n+2)2^{n+2}-3A(n+1)2^{n+1}+2An2^n\\ &= A2^n((4-6+2)n+8-6)=2A2^n=4\cdot 2^n \Leftrightarrow A=2.\end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n=y_{hn}+y_{pn}=C_1+C_2 2^n+n2^{n+1}.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$y_0=C_1+C_2 2^0+0=C_1+C_2=1 \Leftrightarrow C_1=1-C_2,$$
$$y_1=C_1+C_2 2^1+2^2=1-C_2+2C_2+4=C_2+5=5 \Leftrightarrow C_2=0 \text{ vilket ger } C_1=1.$$

Den sökta lösningen är därför

$$y_n=1+n2^{n+1}.$$

3. (a) 1) Om alla ord ska inledas med ”MATA” kan vi plocka bort dessa bokstäver och vi har då bara kvar bokstäverna A,A,E,P,P,R,T,T. Om dessa åtta bokstäver varit olika hade vi kunnat bilda 8! olika ord men eftersom vi har två T:n, två P:n och två A:n och dessa kan permuteras på vardera 2! olika sätt utan att ett ord ändras, får vi totalt

$$\frac{8!}{2!2!2!} = \quad \text{olika ord.}$$

2) Det totala antalet ord vi kan bilda utan restriktioner är $\frac{12!}{4!3!2!}$ eftersom vi har fyra A:n, tre T:n och två P:n som vardera kan permuteras på 4!, 3! respektive 2! olika sätt utan att ett ord ändras.
Enligt 1) finns det $\frac{8!}{2!2!2!}$ ord som börjar med ”MATA”. På motsvarande sätt får vi antalet ord som slutar med ”APA” genom att plocka bort dessa tre bokstäver. Vi har då nio bokstäver kvar: A,A,E,M,P,R,T,T,T, vilket med samma resonemang som i 1) ger $\frac{9!}{2!3!}$ olika ord.
Vi måste även ta hänsyn till de ord som både börjar med ”MATA” och slutar med ”APA”. Dessa ord ingår i båda grupperna som vi ska räkna bort. När vi har plockat bort dessa sju bokstäver återstår E,P,R,T,T, vilket ger $\frac{5!}{2!}$ olika ord.
Vi får nu antalet ord som varken börjar med ”MATA” eller slutar med ”APA” genom att utgå från det totala antalet ord som kan bildas med de tolv bokstäverna och dra bort de ord som börjar med ”MATA” respektive slutar med ”APA”. Eftersom vi då räknar bort de ord som uppfyller båda villkoren två gånger adderar vi dessa en gång. Vi får därför

$$\frac{12!}{4!3!2!} - \frac{8!}{2!2!2!} - \frac{9!}{2!3!} + \frac{5!}{2!} = 1627980 \quad \text{olika ord.}$$

Anm: Formuleringen i fråga 2) kan uppfattas som tvetydig. En strikt logisk tolkning av villkoret *”om orden inte får börja med MATA och inte sluta med APA”* är att inget ord får börja med MATA och inget ord får sluta med APA. Ovanstående lösning utgår från denna tolkning. Om avsikten i stället är att endast utesluta ord som både börjar med MATA och slutar med APA, blir resultatet

$$\frac{12!}{4!3!2!} - \frac{5!}{2!} = 1663140 \quad \text{olika ord.}$$

P.g.a. tolkningsutrymmet är båda tolkningarna godkända här och ger full poäng på uppgiften.

(b) Vi gör ett induktionsbevis.

Påstående: $\sum_{k=2}^{n} 3k(k-1) = 6+18+36+\cdots+3n(n-1) = (n-1)n(n+1)$ för alla heltal $n \geq 2$.

i. Basfallet: För $n = 2$ har vi:

$$\text{VL}_{n=2} = 3 \cdot 2(2-1) = 6$$
$$\text{HL}_{n=2} = 2(2^2-1) = 6 = \text{VL}_{n=2}$$

dvs. påståendet är sant för $n = 2$.

ii. Induktionssteget: Antag att påståendet är sant för $n = p \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{p} 3k(k-1) = 6+18+36+\cdots+3p(p-1) = (p-1)p(p+1) \leftarrow \text{Induktionsantagandet (i.a.)}$$

För $n = p+1$ får vi då

$$\text{VL}_{n=p+1} = \sum_{k=2}^{p+1} 3k(k-1) = \underbrace{6+18+\cdots+3p(p-1)}_{\text{VL}_{n=p}} + 3(p+1)(p+1-1)$$
$$\overset{\text{i.a}}{=} \underbrace{(p-1)p(p+1)}_{\text{HL}_{n=p}} + 3p(p+1) = p(p+1)(p-1+3)$$
$$= ((p+1)-1)(p+1)((p+1)+1) = \text{HL}_{n=p+1}$$

Sammanfattning: Påståendet är sant för $n = 2$ och om det är sant för $n = p$ är det också sant för $n = p+1$. Enligt Induktionsaxiomet är därför påståendet sant för alla heltal $n \geq 2$.

4. (a) Vi börjar med att skriva talen $z_{1,2}$ på polär form ($z = re^{i\theta}$):

$$r = |z_{1,2}| = |-1 \pm i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = 2, \quad \theta = \arg(-1 \pm i\sqrt{3}) = \pm\frac{2\pi}{3}$$

dvs $z_{1,2} = 2e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$. Vi får nu

$$z_{1,2}^3 = (-1 \pm \sqrt{3})^3 = \left(2e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 2^3 e^{\pm i3\frac{2\pi}{3}} = 8e^{\pm i2\pi} = 8.$$

(b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även $-i$ en rot. Enligt Faktorsatsen har polynomet därför faktorn $(z-i)(z+i) = (z^2+1)$. Polynomdivision ger nu $z^5 + z^3 - 8z^2 - 8 = (z^2+1)(z^3-8)$.

Den binomiska ekvationen $z^3 = 8$ kan vi lösa genom att gå över till polär form. Det behövs dock inte i det här fallet. Vi ser direkt att $z = 2$ är en rot och uppgift 4a ger ytterligare två rötter eftersom $(-1\pm\sqrt{3})^3 = 8$. Ekvationen har grad 3 och därför tre rötter dvs. vi har bestämt samtliga. Rötterna till den ursprungliga ekvationen är alltså $z = \pm i$, $z = -1 \pm \sqrt{3}$ samt $z = 2$.

Alternativa lösningar som inte kräver resultatet från 4a:

- Gissa roten 2 innan polynomdivisionen. Vi får då istället faktorn $(z^2+1)(z-2) = z^3 - 2z^2 + z - 2$ och efter polynomdivision med denna faktor återstår en andragradsekvation som är enkel att lösa.
- Lös den binomiska ekvationen $z^3 = 8$ med standardmetoden dvs genom att gå över till polär form:

$$z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3e^{i3\theta} = 8 = 8e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

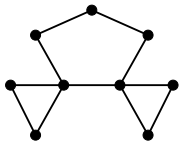
Rötterna till ekvationen $z^3 = 8$ ges därför av $z_k = 2e^{ik\frac{2\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, dvs

$$\begin{cases} z_0 = 2e^{i0} = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2, \\ z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -1 + i\sqrt{3}, \\ z_2 = 2e^{\frac{4\pi}{3})} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

5. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Om resterande antal noder är n och samtliga av dessa har grad g får vi därför

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 4\cdot 2 + 2\cdot 4 + n\cdot g = 2\cdot 11 \Leftrightarrow ng = 6 \Leftrightarrow (n,g) = (1,6),\ (2,3),\ (3,2) \text{ eller } (6,1).$$

Eftersom G är en Eulergraf är den enligt Euler-Hierholzers sats sammanhängande och samtliga noder har jämnt gradtal. Vidare vet vi att $n > 1$ och därför är enda möjligheten som finns kvar att $(n,g) = (3,2)$. Antalet noder är alltså $4 + 2 + 3 = 9$. Figur 1 visar en graf med dessa egenskaper.



Figur 1: En graf som uppfyller villkoren i uppgift 5a.

(b) Sätter vi t = antal transistorer och r = antal resistorer får vi

$$5.5t + 3.5r = 75.$$

Vi söker alltså de positiva heltalslösningarna till den diofantiska ekvationen

$$55t + 35r = 750 \Leftrightarrow 11t + 7r = 150.$$

Eftersom $\text{sgd}(11,7) = 1|150$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(t,r) = (150t_0 - 7n, 150r_0 + 11n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

där (t_0, r_0) är en lösning till hjälpekvationen $11t + 7r = 1$. Om vi inte ser den enkla lösningen direkt kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm eftersom $\text{sgd}(11, 7) = 1$:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 4 - 3 = 11 - 7 - (7 - 4) = 11 - 2 \cdot 7 + 4 = 11 - 2 \cdot 7 + 11 - 7$$
$$= 11 \cdot 2 + 7 \cdot (-3).$$

Vi kan alltså välja $(t_0, r_0) = (2, -3)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(t, r) = (300 - 7n, -450 + 11n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De positiva heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{aligned} t > 0 \Leftrightarrow 300 - 7n > 0 \Leftrightarrow n < \frac{300}{7} = 42.8\ldots \\ r > 0 \Leftrightarrow -450 + 11n > 0 \Leftrightarrow n > \frac{450}{11} = 40.9\ldots \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow n = 41 \text{ eller } n = 42.$$

$n = 41$ ger $(t, r) = (13, 1)$ medan $n = 42$ ger $(t, r) = (6, 12)$. Eftersom $t < \frac{t+r}{2} \Leftrightarrow t < r$ köpte Kajsa 6 transistorer.

6. (a) Faktorsatsen: Om $f(x)$ är ett polynom med $\text{grad}(f) \geq 1$ så är

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha)$$

där $q(x)$ är ett polynom med $\text{grad}(q) = \text{grad}(f) - 1$.

Bevis:

i. ($\Rightarrow$) Dividerar vi $f(x)$ med $x - \alpha$ får vi

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x) \quad (*)$$

där r enligt divisionsalgoritmen är ett polynom med $\text{grad}(r) < \text{grad}(x - \alpha) = 1$ dvs en konstant C. $x = \alpha$ i $(*) \Rightarrow$

$$0 = f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + C = C \Rightarrow f(x) = q(x)(x - \alpha).$$

ii. ($\Leftarrow$) $\quad f(x) = q(x)(x - \alpha) \Rightarrow f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$.

(b) 1) Om Sara lägger alla 20 kulorna i en burk är sannolikheten för att Kalle väljer burken med kulor $\frac{1}{2}$. Eftersom det finns lika många svarta som röda kulor i burken är sannolikheten för att han sedan väljer en röd kula också $\frac{1}{2}$. Enligt multiplikationsprincipen är därför sannolikheten för att Sara vinner $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25\%$.

2) Fallet med alla kulorna i samma burk är redan avklarat. Om r och s är antalet röda respektive svarta kulor i den ena burken och det ligger minst en kula i varje burk är $1 \leq n = r + s \leq 19$. Sannolikheten för att Kalle väljer en röd kula är då enligt samma resonemang som i (1):

$$P = \frac{1}{2}\frac{r}{r+s} + \frac{1}{2}\frac{10-r}{10-r+10-s} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{n} + \frac{10-r}{20-n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{20-n} + r\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20-n}\right)\right)$$

För givet n får vi tre fall:

- $n < 10 \Rightarrow \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{20-n} > 0$ dvs. P ökar med r och max fås då r antar sitt största värde $r = n$ dvs. då $s = 0$.
- $n = 10 \Rightarrow P = \dfrac{1}{2} = 50\%$.
- $n > 10 \Rightarrow \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{20-n} < 0$ dvs. P minskar med r och max fås då r antar sitt minsta värde $r = n - 10$ dvs. då $s = 10$.

Det första fallet innebär att den ena burken innehåller endast röda kulor och det tredje fallet innebär att den andra burken innehåller endast röda kulor. Detta är samma situation som vid första fallet om burkarna byter plats och det räcker därför att vi studerar första fallet. Sannolikheten är alltså störst då $r = n$ dvs. då den ena burken innehåller endast röda kulor:

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{20-r} + r\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{20-r}\right)\right) = 1 - \frac{5}{20-r} \leq 1 - \frac{5}{19} = \frac{14}{19} \approx 74\%$$

med likhet då $r = 1$. Sara ska alltså lägga en röd kula i den ena burken och resten av kulorna i den andra för att optimera sina chanser att vinna.