HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Torsdagen den 30 oktober 2025
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Är utsagan $(A \Leftrightarrow \neg B) \vee A$ en tautologi? *(1p)*

   (b) Lös ekvationen *(2p)*

$$2\cos^2 x + \sin x = 1.$$

   (c) Lös olikheten *(2p)*

$$\frac{x^3 + x^2 - x}{x - 2} \geq x\,.$$

2. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: *(2p)*

$$A:\ |x+1| - |x| \geq x, \qquad B:\ \frac{1}{2} < 2^x < 2, \qquad C:\ \ln x \leq 0.$$

   (b) Lös differensekvationen *(3p)*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 2. \end{cases}$$

3. (a) Härled formeln för en geometrisk summa. *(2p)*

   (b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{2k-2} = 3 + 12 + 48 + \cdots + 3 \cdot 2^{2n-2} = 4^n - 1$$

   för alla heltal $n \geq 1$. *(3p)*

4. (a) Skriv talen

$$z_{1,2} = 1 \pm i$$

   på polär form och talen $z_{1,2}^4$ på rektangulär form. *(2p)*

   (b) Ekvationen

$$z^6 + z^4 + 4z^2 + 4 = 0$$

   har roten $-i$. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. *(3p)*

5. (a) Grafen G är en Eulergraf som har 12 bågar. Två av noderna har grad 4 och tre har grad 2. Utöver dessa noder finns ytterligare ett antal noder (fler än en) och de har alla samma grad. Vilken grad har de resterande noderna? Rita en graf med dessa egenskaper. *(2p)*

   (b) Turistingenjören Kajsa har precis kommit tillbaka från en lång resa. Under de dagar på resan hon åkte båt färdades hon i genomsnitt 720 km/dygn och övriga resdagar färdades hon i genomsnitt 400 km/dygn. Kajsas resa var totalt 15200 km och hon åkte båt mindre än en tredjedel av resdagarna. Hur många dagar var Kajsa bortrest? *(3p)*

6. (a) Bestäm först $\phi(55)$ och beräkna sedan $123^{321} \bmod 55$. *(2p)*

   (b) Spelingenjören Pelle gör 6 kast med en vanlig tärning. Vad är sannolikheten för att det blir

   1) minst en sexa? *(1p)*
   2) minst två tärningar som visar samma? *(1p)*
   3) endast dubbletter t.ex. $\{2, 2, 3, 3, 5, 5\}$ där ordningen inte har någon betydelse? *(1p)*

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi gör en sanningsvärdestabell:

A	B	$\neg B$	$A \Leftrightarrow \neg B$	$(A \Leftrightarrow \neg B) \vee A$
S	S	F	F	S
S	F	S	S	S
F	S	F	S	S
F	F	S	F	F

Eftersom utsagan inte är sann oberoende av de ingående utsagornas sanningsvärden är den inte heller en tautologi.

(b) Ekvationen är en andragradsekvation i $\sin x$:

$$2\cos^2 x + \sin x = 2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ eller } \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Lösningarna ges nu av:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,$$
$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi.$$

(c) Vi samlar alla termer på vänster sida om olikhetstecknet, gör liknämnigt, faktoriserar och gör teckenstudium:

$$\frac{x^3 + x^2 - x}{x - 2} - x = \frac{x^3 + x^2 - x - x(x-2)}{x - 2} = \frac{x(x^2+1)}{x-2} \geq 0.$$

Faktorn $x^2 + 1 > 0$ och behöver därför inte tas med i teckenstudiet:

x		0		2	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x^2+1)}{x-2}$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3 + x^2 - x}{x-2} \geq x \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ eller } x > 2.$$

2. (a) A: Vi har:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

och vi löser därför olikheten i tre intervall:

x	$x < -1$	-1	$-1 \leq x < 0$	0	$x \geq 0$
	$\lvert x+1\rvert - \lvert x\rvert \geq x$		$\lvert x+1\rvert - \lvert x\rvert \geq x$		$\lvert x+1\rvert - \lvert x\rvert \geq x$
	$\Leftrightarrow -(x+1) - (-x) \geq x$		$\Leftrightarrow x+1-(-x) \geq x$		$\Leftrightarrow x+1-x \geq x$
	$\Leftrightarrow x \leq -1$		$\Leftrightarrow x \geq -1$		$\Leftrightarrow x \leq 1$
	Uppfyllt för alla x i intervallet!		Uppfyllt för alla x i intervallet!		

$$\therefore |x+1| - |x| \geq x \Leftrightarrow x \leq 1.$$

$B:\ \frac{1}{2} < 2^x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$
$C:\ \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$
De implikationer som gäller är därför: $B \Rightarrow A$ och $C \Rightarrow A$.

(b) Den allmänna lösningen till den linjära differensekvationen

$$\mathcal{L}(y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2 \tag{1}$$

ges av $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ där y_{hn} är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differensekvation $\mathcal{L}(y_n) = 0$ och y_{pn} *en* partikulärlösning till (1).

i. *Bestämning av y_{hn}:*
Rötterna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ är $r_1 = r_2 = 1$ vilket ger

$$y_{hn} = (C_1 n + C_2) \cdot 1^n = C_1 n + C_2.$$

ii. *Bestämning av y_{pn}:*
Eftersom högerledet är en konstant (polynom av grad 0) är standardansatsen ett polynom av samma grad dvs. $y_{pn} = a$ men eftersom den ingår i y_{hn} kommer den inte att fungera. Efter multiplikation med n ser vi att även $y_{pn} = an$ ingår i y_{hn} och vi multiplicerar därför med n ytterligare en gång och gör ansatsen $y_{pn} = an^2$. Insättning ger:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n &= a(n+2)^2 - 2a(n+1)^2 + an^2 = a(n^2(1-2+1) + n(4-4) + 4 - 2) \\ &= 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är alltså

$$y_n = y_{hn} + y_{pn} = C_1 n + C_2 + n^2.$$

Från begynnelsevillkoren får vi

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 \cdot 0 + C_2 + 0^2 = C_2 = 1 \\ y_1 &= C_1 \cdot 1^1 + C_2 + 1^2 = C_1 + 1 + 1 = C_1 + 2 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är därför

$$y_n = n^2 + 1.$$

3. (a) Geometrisk summa:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ \Rightarrow xS &= x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} = S - 1 + x^{n+1} \Leftrightarrow S(x-1) = x^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

För $x \neq 1$ är alltså

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

(b) Här kan vi förstås göra ett induktionsbevis men eftersom vi ser att det är en geometrisk summa kan vi utnyttja formeln från 3a om vi tar hänsyn till att summan startar från $k = 1$ istället för $k = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{2k-2} &= \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{2k} 2^{-2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n} 4^k = \frac{3}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} 4^k - 1\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} - 1\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{4^{n+1} - 1 - 3}{3}\right) = \frac{4^{n+1} - 4}{4} = 4^n - 1. \end{aligned}$$

4. (a) Vi börjar med att skriva talen $z_{1,2}$ på polär form ($z = re^{i\theta}$):

$$r = |z_{1,2}| = |1 \pm i| = \sqrt{1^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arg(1 \pm i) = \pm \frac{\pi}{4}$$

dvs $z_{1,2} = \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$. Vi får nu

$$z_{1,2}^4 = \left(\sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 e^{\pm i 4 \frac{\pi}{4}} = 4e^{\pm i\pi} = 4e^{i\pi} = -4.$$

(b) Eftersom polynomet i vänsterledet har reella koefficienter är även konjugatet i en rot. Enligt faktorsatsen är därför $g(z) = (z-(-i))(z-i) = z^2+1$ en faktor i $p(z) = z^6+z^4+4z^2+4$. Polynomdivisionen $p(z)/g(z)$ ger

$$p(z) = (z^2+1)(z^4+4).$$

Den binomiska ekvationen $z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4=-4$ kan lösas genom att gå över till polär form men det behövs dock inte i det här fallet eftersom 4a ovan redan har gett oss två rötter: $1\pm i$ och därmed faktorn $(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2-2z+2$. Ytterligare en polynomdivision ger nu $p(z) = (z^2+1)(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$ där vi enkelt hittar nollställena $-1\pm i$ till den sista andragradsfaktorn med pq-formeln.

Egentligen är inte beräkningen efter den första polynomdivisionen nödvändig eftersom rötterna till en binomisk ekvation av grad 4 bildar en regelbunden 4-hörning i det komplexa talplanet. Eftersom två av rötterna är $1\pm i$ måste alltså de övriga vara $-1\pm i$.
Sammanfattningsvis har den ursprungliga ekvationen rötterna $z=\pm i$ och $z=\pm 1\pm i$.

Anm: För att lösa $z^4=-4$ kan vi som sagt även använda standardmetoden för lösning av binomiska ekvationer, dvs gå över till polär form:

$$z^4 = (re^{i\theta})^4 = r^4e^{i4\theta} = -4 = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

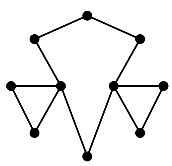
Rötterna till ekvationen $z^4=-4$ ges därför av $z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$, $k=0,1,2,3$, dvs

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1+i, \\ z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i, \\ z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i, \\ z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i. \end{cases}$$

5. (a) Enligt ”Handskakningslemmat” är summan av nodernas gradtal lika med 2 gånger antalet bågar. Om resterande antal noder är n och samtliga av dessa har grad g får vi därför

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2|E| \Leftrightarrow 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + n\cdot g = 2\cdot 12 \Leftrightarrow ng = 10$$
$$\Leftrightarrow (n,g) = (1,10), (2,5), (5,2) \text{ eller } (10,1).$$

Eftersom $n>1$ utgår det första alternativet. Vi vet också att G är en Eulergraf vilket innebär att samtliga noder har jämnt gradtal och det betyder att det enda möjliga alternativet av de tre återstående är $(n,g)=(5,2)$. De resterande noderna har alltså grad 2. Figur 1 visar en graf med dessa egenskaper.



Figur 1: En graf som uppfyller villkoren i uppgift 5a.

(b) Sätter vi x = antal dygn med båt och y = antal dygn med övriga färdmedel hittar vi svaret bland de positiva heltalslösningarna till den diofantiska ekvationen

$$720x + 400y = 15200 \Leftrightarrow 9x + 5y = 190.$$

Eftersom $\text{sgd}(9,5) = 1|190$ har ekvationen heltalslösning och den allmänna lösningen ges av

$$(x,y) = (190x_0 + 5n, 190y_0 - 9n), \quad n\in\mathbb{Z},$$

där (x_0,y_0) är en lösning till hjälpekvationen $9x+5y=1$. Eftersom $\text{sgd}(9,5)=1$ kan vi hitta en sådan med hjälp av Euklides algoritm (om vi inte ser den enkla lösningen direkt):

$$\left.\begin{array}{l} 9 = 1\cdot 5 + 4 \\ 5 = 1\cdot 4 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 5-4 = 5-(9-5) = 9\cdot(-1) + 5\cdot 2.$$

Vi kan alltså välja $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ och den allmänna lösningen ges nu av:

$$(x, y) = (-190 + 5n, 380 - 9n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De positiva heltalslösningarna bestäms genom:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \Leftrightarrow -190 + 5n > 0 \Leftrightarrow n > \dfrac{190}{5} = 38 \\ y > 0 \Leftrightarrow 380 - 9n > 0 \Leftrightarrow n < \dfrac{380}{9} = 42.222\ldots \end{array}\right\} \Leftrightarrow 39 \leq n \leq 42.$$

$n = 39$ ger $(x, y) = (5, 29)$ medan $n = 40$ ger $(x, y) = (10, 20)$ vilket inte uppfyller villkoret att $x < \frac{x+y}{3}$. Övriga n ger större x och mindre y så de uppfyller inte heller villkoret på x. Den enda lösningen är alltså $(x, y) = (5, 29)$ vilket ger totalt 34 resdagar.

6. (a) Om p och q är två olika primtal är $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$. Eftersom $55 = 11 \cdot 5$ (dvs en produkt av två olika primtal) får vi direkt att $\phi(55) = (11-1)(5-1) = 40$.
Eftersom $\text{sgd}(123, 55) = 1$ ger Eulers sats att $123^{\phi(55)} \equiv 1 \pmod{55}$ och vi får därför

$$123^{321} = 123^{320} \cdot 123^1 = (123^{40})^8 \cdot 123^1 \equiv 1^8 \cdot 123 = 123 \equiv 13 \pmod{55}$$

eftersom $123 = 2 \cdot 55 + 13$ dvs $123^{321} \bmod 55 = 13$.

(b) Totala antalet möjliga utfall då en tärning kastas 6 gånger är 6^6.

1) $P(\text{Minst en sexa}) = 1 - P(\text{Ingen sexa})$. Om vi inte ska få en sexa är antalet utfall per kast 5 och vi får

$$P(\text{Minst en sexa}) = 1 - \frac{5^6}{6^6} = \frac{31031}{46656} = 0.665...$$

2) $P(\text{Minst två visar samma}) = 1 - P(\text{Alla visar olika})$. Om alla ska visa olika har vi 6 utfall på första kastet, 5 på andra, 4 på tredje osv. Detta ger:

$$P(\text{Minst två visar samma}) = 1 - \frac{6!}{6^6} = \frac{319}{324} = 0.984...$$

3) Vi väljer först ut vilka tre valörer vi ska ha dubbletter av och detta kan göras på $\binom{6}{3}$ olika sätt. För varje sådant val kan vi få valörerna i olika ordning när kasten görs och vi kan se det som att vi ska bilda ord med 6 bokstäver där vi bara har dubbletter av 3 bokstäver. Detta kan göras på totalt $\frac{6!}{2!2!2!}$ olika sätt och vi får därför

$$P(\text{Endast dubbletter}) = \frac{\binom{6}{3}\frac{6!}{2!2!2!}}{6^6} = \frac{1800}{6^6} = \frac{25}{648} = 0.0385...$$